Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Folgen, Reihen
> Doppelsumme

Aufgabe: Stelle die endliche Doppelsumme

$$\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}\cdot 3^j$$

als geschlossenen Ausdruck dar.

Lösung: I. Wir rufen uns zunächst die folgenden Summenformeln ins Gedächtnis:

$\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$ (geometrische Summe)

$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^i b^{n-i} = (a+b)^n$ (binomischer Lehrsatz)

(a, b, q reell).

II. Wir berechnen:

$$\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}\cdot 3^j =$$

$$\binom{0}{0}\cdot 3^0 + \left(\binom{1}{0}+\binom{1}{1}\right)\cdot 3^1 + \left(\binom{2}{0}+\binom{2}{1}+\binom{2}{2}\right)\cdot 3^2 + \ldots + \left(\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n}\right)\cdot 3^n =$$

$$1\cdot 3^0 + 2\cdot 3^1 + 4\cdot 3^2 + \ldots + 2^n\cdot 3^n = 2^0\cdot 3^0 + 2^1\cdot 3^1 + 2^2\cdot 3^2 + \ldots + 2^n\cdot 3^n =$$

$$6^0 + 6^1 + 6^2 + \ldots + 6^n = \sum_{i=0}^{n} 6^i = \frac{6^{n+1}-1}{6-1} = \frac{1}{5}(6^{n+1}-1)$$

und haben dabei den binomischen Lehrsatz (a=b=1), Potenzgesetze und die geometrische Summe (q=6) verwendet.

www.michael-buhlmann.de / 11.2020 / Aufgabe 1176