Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Folgen, Reihen
> Doppelsumme

Aufgabe: Stelle die endliche Doppelsumme

$$\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}\cdot 3^{i}$$

als geschlossenen Ausdruck dar.

Lösung: I. Wir rufen uns zunächst die folgenden Summenformeln ins Gedächtnis:

$$\sum_{i=0}^{n} q^{i} = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$ (geometrische Summe)

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} a^{i} b^{n-i} = (a+b)^{n}$$ (binomischer Lehrsatz)

(a, b, q reell).

II. Wir berechnen:

$$\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}\cdot 3^{i} =$$

$$\binom{0}{0}\cdot 3^{0} + \left(\binom{1}{0}\cdot 3^{0} + \binom{1}{1}\cdot 3^{1}\right) + \left(\binom{2}{0}\cdot 3^{0} + \binom{2}{1}\cdot 3^{1} + \binom{2}{2}\cdot 3^{2}\right) + \ldots$$
$$+ \left(\binom{n}{0}\cdot 3^{0} + \binom{n}{1}\cdot 3^{1} + \ldots + \binom{n}{n}\cdot 3^{n}\right) =$$

$$\binom{0}{0}\cdot 3^{0}\cdot 1^{0} + \left(\binom{1}{0}\cdot 3^{0}\cdot 1^{1} + \binom{1}{1}\cdot 3^{1}\cdot 1^{0}\right) + \left(\binom{2}{0}\cdot 3^{0}\cdot 1^{2} + \binom{2}{1}\cdot 3^{1}\cdot 1^{1} + \binom{2}{2}\cdot 3^{2}\cdot 1^{0}\right) + \ldots$$
$$+ \left(\binom{n}{0}\cdot 3^{0}\cdot 1^{n} + \binom{n}{1}\cdot 3^{1}\cdot 1^{n-1} + \ldots + \binom{n}{n}\cdot 3^{n}\cdot 1^{0}\right) =$$

$$4^{0} + 4^{1} + 4^{2} + \ldots + 4^{n} = \sum_{i=0}^{n} 4^{i} = \frac{4^{n+1}-1}{4-1} = \frac{1}{3}(4^{n+1}-1)$$

und haben dabei den binomischen Lehrsatz (a=3, b=1) und die geometrische Summe (q=4) verwendet.

www.michael-buhlmann.de / 11.2020 / Aufgabe 1177