Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Folgen, Reihen
> Doppelsumme

Aufgabe: Stelle die endliche Summe

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n}\frac{i}{j(j+1)}$$

als geschlossenen Ausdruck dar.

Lösung: I. Wir führen zunächst die folgende Summenformel für die ersten n natürlichen Zahlen auf:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

II. Wir stellen die Summanden der vorgegebenen Doppelsumme in einer Tabelle dar und haben:

i = | j =	1	2	3	4	…	k	…	n
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{20}$	…	$\frac{1}{k(k+1)}$	…	$\frac{1}{n(n+1)}$
2		$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{20}$	…	$\frac{2}{k(k+1)}$	…	$\frac{2}{n(n+1)}$
3			$\frac{3}{12}$	$\frac{3}{20}$	…	$\frac{3}{k(k+1)}$	…	$\frac{3}{n(n+1)}$
4				$\frac{4}{20}$	…	$\frac{4}{k(k+1)}$	…	$\frac{4}{n(n+1)}$
…						…	…	…
k						$\frac{k}{k(k+1)}$	…	$\frac{k}{n(n+1)}$
…							…	…
n								$\frac{n}{n(n+1)}$
Summe	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	…	$\frac{1}{2}$	…	$\frac{1}{2}$

In der Tat ist für jedes 1≤k≤n: $\sum_{j=1}^{k}\frac{j}{k(k+1)} = \frac{\sum_{j=1}^{k} j}{k(k+1)} = \frac{\frac{k(k+1)}{2}}{k(k+1)} = \frac{1}{2}$ gemäß der obigen Summenformel. Daraus folgt, dass die vorgegebene Doppelsumme sich wie folgt umschreiben und berechnen lässt:

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n}\frac{i}{j(j+1)} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}\frac{j}{i(i+1)} = \sum_{i=0}^{n}\frac{\sum_{j=0}^{i} j}{i(i+1)} = \sum_{i=0}^{n}\frac{\frac{i(i+1)}{2}}{i(i+1)} = \sum_{i=0}^{n}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}1 = \frac{1}{2}n.$$

www.michael-buhlmann.de / 12.2020 / Aufgabe 1195