Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Folgen, Reihen
> Summenformel

Aufgabe: Zeige, dass die folgende Summenformel gilt:

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \cdot i = \frac{(-1)^n(2n+1)-1}{4}\text{, } n \in \mathbf{N_0}.$$

Lösung (mit vollständiger Induktion): I. Allgemein gilt für das Beweisverfahren der vollständigen Induktion für Aussagen über die natürlichen Zahlen nε**N** die folgende Vorgehensweise:

1) Induktionsanfang der Gültigkeit der Aussage für ein n=k_0 ε**N** (meist n=0 oder n=1);
2) Induktionsannahme der Gültigkeit der Aussage für n=k;
3) Induktionsbehauptung der Gültigkeit der Aussage für n=k+1;
4) Induktionsschritt von n=k auf n=k+1, d.h.: Beweis der Induktionsbehauptung unter Verwendung der Induktionsannahme;
5) Induktionsende auf Grund von Induktionsanfang und -schritt, d.h. letztlich: Gültigkeit der Aussage für alle natürlichen Zahlen nε**N**.

II. Induktionsbeweis der Summenformel:

Behauptung: $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \cdot i = \frac{(-1)^n(2n+1)-1}{4}$, n$\varepsilon$**N₀**.

Beweis:

1) *Induktionsanfang*: n=0 mit: $\sum_{i=0}^{0}(-1)^i \cdot i = (-1)^0 \cdot 0 = 0 = \frac{1-1}{4} = \frac{(-1)^0(2\cdot 0+1)-1}{4}$ als wahre Aussage.

2) *Induktionsannahme* für n=k: $\sum_{i=0}^{k}(-1)^i \cdot i = \frac{(-1)^k(2k+1)-1}{4}$, angenommen als wahre Aussage (*).

3) *Induktionsbehauptung* für n=k+1: $\sum_{i=0}^{k+1}(-1)^i \cdot i = \frac{(-1)^{k+1}(2(k+1)+1)-1}{4}$, als wahr zu beweisen.

4) *Induktionsschritt* von n=k auf n=k+1: Wir weisen die Induktionsbehauptung unter Benutzung der Induktionsannahme (*) nach und beweisen damit die Gültigkeit des Induktionsschritts. Es gilt:

$$\sum_{i=0}^{k+1}(-1)^i \cdot i = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i \cdot i + (-1)^{k+1}\cdot(k+1) \underset{(*)}{=} \frac{(-1)^k(2k+1)-1}{4} + (-1)^{k+1}\cdot(k+1) =$$

$$\frac{(-1)^k(2k+1)-1}{4} + \frac{4\cdot(-1)^{k+1}\cdot(k+1)}{4} = \frac{(-1)^k(2k+1)-1+4\cdot(-1)^{k+1}\cdot(k+1)}{4} =$$

$$\frac{-(-1)^{k+1}(2k+1)-1+(-1)^{k+1}\cdot(4k+4)}{4} = \frac{-(-1)^{k+1}(2k+1)-1+(-1)^{k+1}\cdot(4k+4)}{4} =$$

$$\frac{(-1)^{k+1}\big(-(2k+1)+(4k+4)\big)-1}{4} = \frac{(-1)^{k+1}\big(-2k-1+4k+4\big)-1}{4} =$$

$$\frac{(-1)^{k+1}\big(2k+3\big)-1}{4} = \frac{(-1)^{k+1}\big(2k+2+1\big)-1}{4} = \frac{(-1)^{k+1}(2(k+1)+1)-1}{4}.$$

Damit ist die Induktionsbehauptung nachgewiesen.

5) *Beweisende*: Wegen des Induktionsanfangs gilt auf Grund des Induktionsschritts die zu beweisende Aussage nicht nur für n=0, sondern auch für n=1, weiter für n=2 usw., mithin für alle $n \in \mathbf{N}_0$.

www.michael-buhlmann.de / 02.2021 / Aufgabe 1314