Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Taylorpolynom

Aufgabe: Bestimme das Taylorpolynom 3. Grades mit Entwicklungsmittelpunkt $x_0 = 0$ zur Funktion:

$$f(x) = \arctan x .$$

Führe eine Fehlerabschätzung mit Hilfe des Restglieds für das Intervall [0; 1] durch. Berechne einen Näherungswert für π/4 = arctan(1).

Lösung: I. Zu einer unendlich oft differenzierbaren reellwertigen Funktion bestimmt sich das Taylorpolynom $T_n(x)$ n. Grades mit Entwicklungsmittelpunkt x_0 als:

$$T_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i \ .$$

Eine Restgliedformel für das Intervall $[x_0, x]$ lautet:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

mit $\xi \varepsilon [x_0; x]$.

II. Wir bestimmen die 1. bis 4. Ableitung der Arkustangensfunktion u.a. nach der Ketten- und Quotientenregel:

$f(x) = \arctan x$

$f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1}$

$f''(x) = -(1+x^2)^{-2} \cdot 2x = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$

$f'''(x) = \dfrac{-2(1+x^2)^2 + 2x \cdot 2(1+x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^4} = \dfrac{-2(1+x^2) + 8x^2}{(1+x^2)^3} = \dfrac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$

$f''''(x) = \dfrac{12x(1+x^2)^3 - (6x^2-2) \cdot 3(1+x^2)^2 \cdot 2x}{(1+x^2)^6} = \dfrac{12x(1+x^2) - (6x^2-2) \cdot 6x}{(1+x^2)^4} =$

$\dfrac{12x + 12x^3 - 36x^3 + 12x}{(1+x^2)^4} = \dfrac{-24x^3 + 24x}{(1+x^2)^4}$

und haben an der Stelle $x_0 = 0$ die Werte:

$f(0) = \arctan(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -2$.

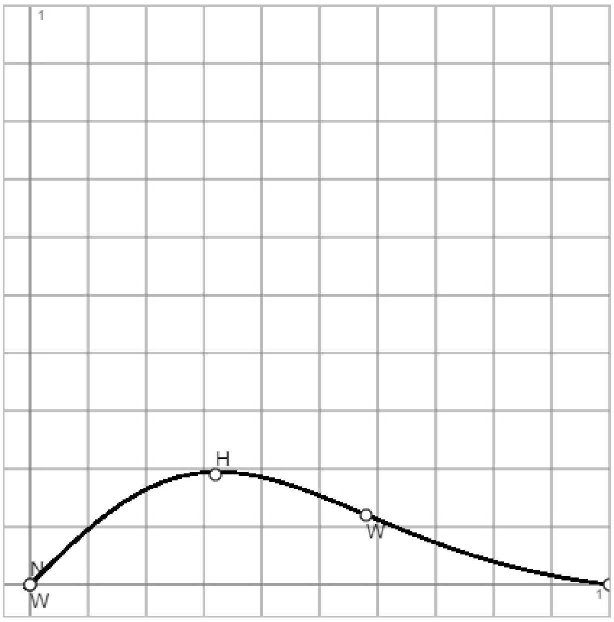
Es ergibt sich als gesuchtes Taylorpolynom 3. Grades mit Entwicklungsmittelpunkt $x_0 = 0$ somit:

$T_3(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{3} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i = \frac{0}{0!}x^0 + \frac{1}{1!}x^1 + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{-2}{3!}x^3 = 0 + 1 \cdot x + 0 - \frac{2}{6}x^3 = x - \frac{1}{3}x^3 .$

III. Das Restglied stellt sich mit Entwicklungsmittelpunkt $x_0 = 0$ dar in der Form:

R$_3$(x) = $\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x^{n+1} = \frac{\frac{-24\xi^3+24\xi}{(1+\xi^2)^4}}{4!}x^4 = \frac{-\xi^3+\xi}{(1+\xi^2)^4}x^4$

für jedes Intervall [0; x] bei ξε[0; x]. Die Fehlerabschätzung mit |R$_3$(1)| = R$_3$(1) = $\frac{-\xi^3+\xi}{(1+\xi^2)^4}\cdot 1^4$ = $\frac{-\xi^3+\xi}{(1+\xi^2)^4}$ für das Intervall [0; 1] ergibt sich aus der Betrachtung der Funktion y = $\frac{-\xi^3+\xi}{(1+\xi^2)^4}$ gemäß Graph:



und Hochpunkt der Funktion y bei H(0,324|0,1945) (Bestimmung des Hochpunkts der Funktion y: y'(ξ) = 0 => ξ ≈ 0,324 mit maximalen y-Wert y(0,324) = 0,1945 auf dem Intervall [0; 1]). Es gilt somit die Abschätzung:

R$_3$(1) ≤ 0,1945.

IV. Eine andere, allerdings gröbere Abschätzung ergibt sich, wenn wir beim Bruch y = $\frac{-\xi^3+\xi}{(1+\xi^2)^4}$, ξε[0; 1], den Zähler vergrößern und den Nenner verkleinern. Für die Nennerfunktion n(ξ) gilt dementsprechend:

n(ξ) = $(1+\xi^2)^4 \geq 1$ (wegen: $\xi^2 \geq 0$).

Die Zählerfunktion z(ξ) = $-\xi^3 + \xi$ ist maximal bei ξ = $\frac{1}{\sqrt{3}}$ wegen:

z'(ξ) = $-3\xi^2 + 1 = 0 \Rightarrow 1 = 3\xi^2 \Rightarrow \xi^2 = 1/3 \Rightarrow \xi = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (auf dem Intervall [0; 1])

z''(ξ) = -6ξ => z''(1/√3) = -6/√3 < 0

mit: z($\frac{1}{\sqrt{3}}$) = $\frac{1}{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$. Somit ist:

$$0 \leq y = \frac{-\xi^3+\xi}{(1+\xi^2)^4} \leq \frac{\frac{2}{3\sqrt{3}}}{1} = \frac{2}{3\sqrt{3}} \approx 0{,}385$$

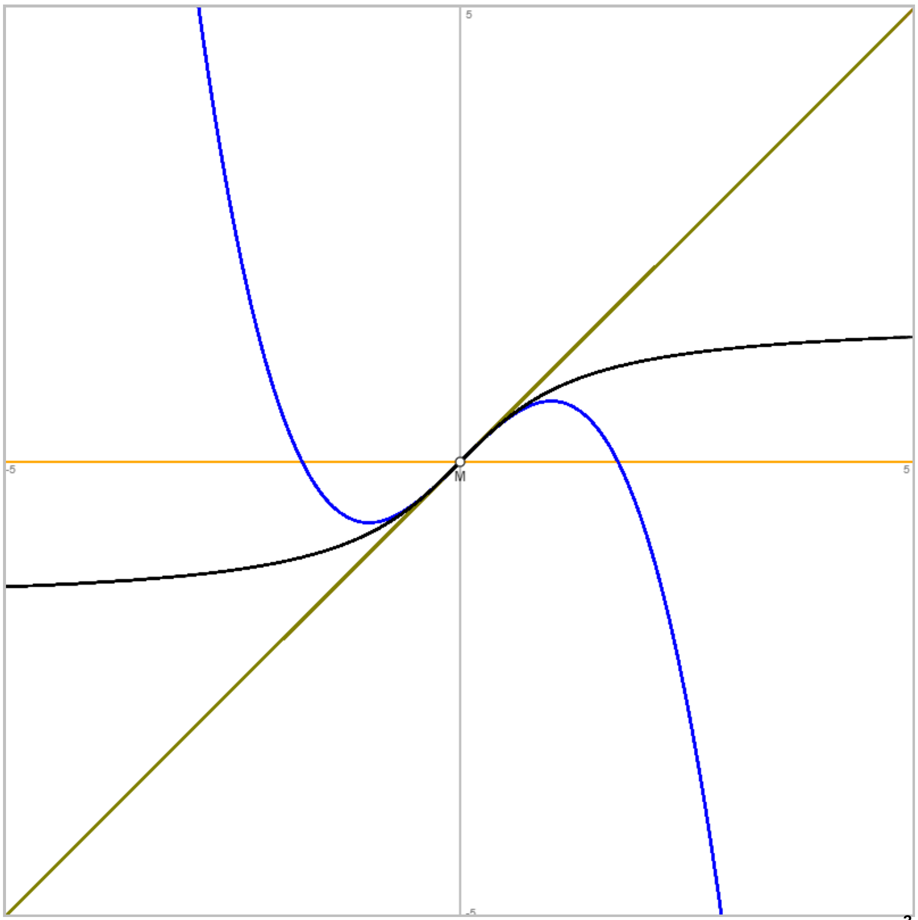
und daher:

R$_3$(1) ≤ 0,385.

V. Der Näherungswert für f(1) = arctan(1) = π/4 ist:

$f(1) \approx T_3(1) = 1 - 1/3 = 2/3$.
Mit π/4 = 0,785398… haben wir eine Abweichung der Werte von:
π/4 – 2/3 = 0.118731… ≤ 0,1945 bzw. ≤ 0,385.

VI. Wir zeigen noch die Graphen von f(x) = $\arctan x$ und den Taylorpolynomen $T_0(x)$, $T_1(x)$, $T_3(x)$:



Funktion: f(x) = arctan(x); Taylorpolynome $T_0(x) = 0$, $T_1(x) = T_2(x) = x$, $T_3(x) = x - x^3/3$

www.michael-buhlmann.de / 08.2021 / Aufgabe 1471