Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Tangenten

Aufgabe: Gesucht sind die Tangenten an die Parabel f(x) = x^2 durch den Punkt P(1|0).

1. Lösung: Die Punkt-Steigungsform einer Geraden leitet über zu der Gleichung der Tangente an eine Funktion f(x) durch einen Punkt P(x_1|y_1) außerhalb von f(x):

$$\text{t: } \frac{y_1 - f(u)}{x_1 - u} = f'(u)$$

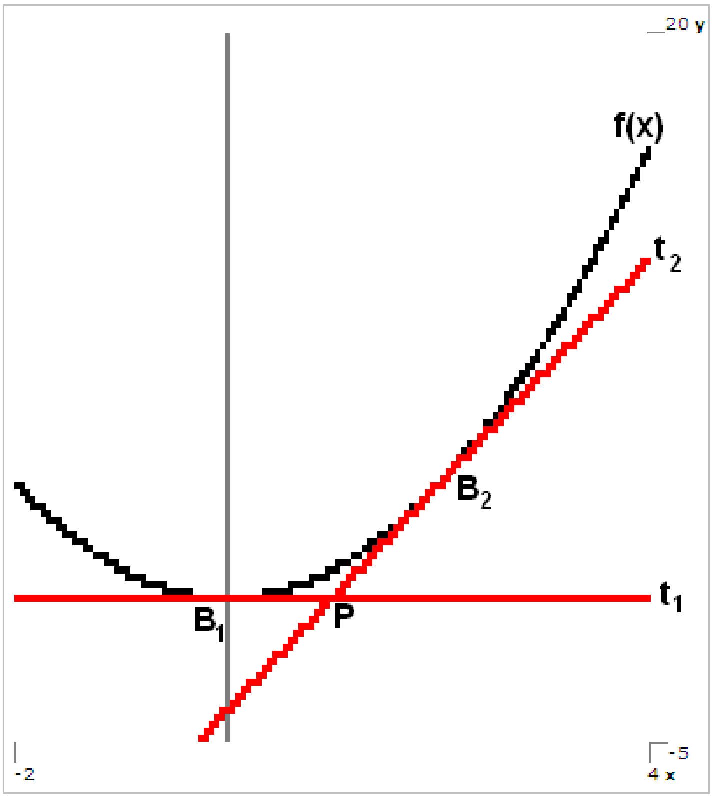
Mit dem Ansatz: $\frac{0-u^2}{1-u} = 2u$ auf Grund von f'(x) = 2x erhalten wir:

$$-u^2 = 2u(1-u) \Leftrightarrow -u^2 = 2u - 2u^2 \Leftrightarrow u^2 - 2u = 0 \Leftrightarrow u(u-2) \Leftrightarrow u = 0 \vee u - 2 = 0 \Leftrightarrow u = 0 \vee u = 2$$

Die gesuchten Stellen auf der Parabel sind somit: u_1=0, u_2=2, die Berührpunkte lauten: B_1(0|0) (f(0)=0) und B_2(2|4) (f(2)=4). Wegen f'(0)=0 und f'(2)=4 ergeben sich als gesuchte Tangenten:

t_1: y = 0(x-0) + 0 = 0 (x-Achse)
t_2: y = 4(x-2) + 4 = 4x–8+4 = 4x – 4

Beide Tangenten gehen durch den Punkt P(1|0).



2. Lösung: Die Tangente t an eine Funktion f(x) in einem noch unbekannten Berührpunkt B(u|f(u)) lautet:

$$\text{t: } y = f'(u)(x-u) + f(u)$$

Da die die Tangente durch einen Punkt P(x_1|y_1) außerhalb von f(x) gehen soll, ergibt die

Punktprobe den Ansatz:

$$\text{t: } y_1 = f'(u)(x_1 - u) + f(u)$$

Mit dem Ansatz: $0 = 2u(1-u) + u^2$ auf Grund von f'(x) = 2x erhalten wir:

$$0 = 2u(1-u) + u^2 \Leftrightarrow 0 = 2u - 2u^2 \Leftrightarrow u^2 - 2u = 0 \Leftrightarrow u(u-2) \Leftrightarrow u = 0 \vee u - 2 = 0 \Leftrightarrow u = 0 \vee u = 2$$

Die gesuchten Stellen auf der Parabel sind somit: u_1=0, u_2=2, die Berührpunkte lauten: B_1(0|0) (f(0)=0) und B_2(2|4) (f(2)=4). Wegen f'(0)=0 und f'(2)=4 ergeben sich als gesuchte Tangenten:

t_1: y = 0(x-0) + 0 = 0 (x-Achse)
t_2: y = 4(x-2) + 4 = 4x–8+4 = 4x – 4

Beide Tangenten gehen durch den Punkt P(1|0).

www.michael-buhlmann.de / 08.2014 / Aufgabe 37