Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben

> Analysis

> Tangenten

Aufgabe: Bestimme an die Funktion

$$f(x) = x^3 + 5x^2$$

die Berührpunkte und die Tangenten, die durch den Punkt P(1|-1) verlaufen.

1. Lösung (mit Ableitung und Differenzenquotienten): I. Im Berührpunkt B(u|f(u)) müssen Differenzenquotient der Tangenten als Gerade durch Berührpunkt und Punkt P(x|y) und Ableitung im Berührpunkt identisch sein, also:

t:
$$\frac{y - f(u)}{x - u} = f'(u)$$
 (*).

Auflösen der Gleichung (*) nach u ergibt die Berührstellen u_1 , ... Durch die Berührpunkte $B_1(u_1|f(u_1))$, ... und den Punkt P(x|y) gehen dann die Tangenten: t_1 : $y = f'(u_1)(x-u_1) + f(u_1)$, ...

II. Zu $f(x) = x^3 + 5x^2$ mit $f(u) = u^3 + 5u^2$ bilden wir die Ableitungsfunktion $f'(x) = 3x^2 + 10x$ mit $f'(u) = 3u^2 + 10u$ an der zu berechnenden Berührpunktstelle u sowie mit dem Punkt P(1|-1)

(x = 1, y = -1) den Differenzenquotienten $\frac{-1-f(u)}{1-u} = \frac{-u^3-5u^2-1}{1-u}$. Gleichsetzen von Differen-

zenguotient und Ableitung ergibt:

Die Gleichung (**) hat als Lösungen: $u_1 = -2.75$, $u_2 = -0.1$, $u_3 = 1.85$. Die Berührpunkte berechnen sich mit f(-2.75), f(-0.1) und f(-1.85) als:

 $B_1(-2,75|17,02)$

 $B_2(-0.1|0.05)$

 $B_3(1,85|23,44)$,

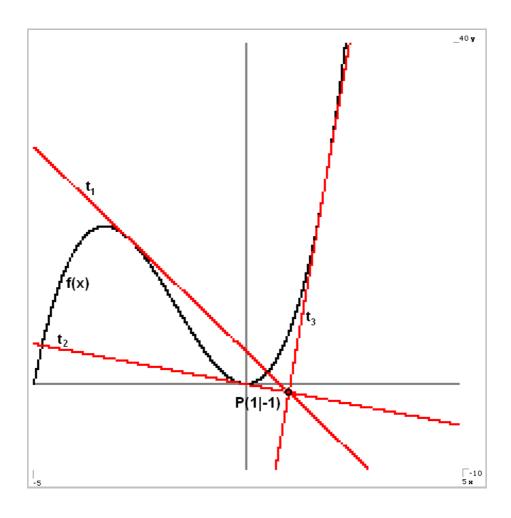
die Tangenten als:

 t_1 : y = f'(-2,75)(x+2,75)+f(-2,75) = -4,8x+3,8

 t_2 : y = f'(-0.1)(x+0.1)+f(-0.1) = -0.95x-0.05,

 t_3 : y = f'(1,85)(x-1,85)+f(1,85) = 28,77x-29,77.

Alle Tangenten gehen durch den Punkt P(1|-1) (y(1) = -1) und durch den jeweiligen Berührpunkt.



2. Lösung (mit der Tangentenformel): I. Allgemein gilt die Formel der Tangentengleichung: y = f'(u)(x-u) + f(u) (*)

für einen Berührpunkt B(u|f(u)) auf der Funktion f(x), wobei die Variablen x, y durch den Punkt P(x|y) stehen. Das Auflösen der Gleichung (*) liefert dann die Berührstellen u_1 , ... Durch die Berührpunkte $B_1(u_1|f(u_1))$, ... und den Punkt P(x|y) gehen dann die Tangenten: t_1 : $y = f'(u_1)(x-u_1) + f(u_1)$, ...

II. Zu $f(x) = x^3 + 5x^2$ mit $f(u) = u^3 + 5u^2$ bilden wir die Ableitungsfunktion $f'(x) = 3x^2 + 10x$ mit $f'(u) = 3u^2 + 10u$ an der zu berechnenden Berührpunktstelle u und setzen in die Gleichung t: y = f'(u)(x-u) + f(u) (*)

den Punkt P(1|-1) (x = 1, y = -1) ein, so dass die Gleichung (**) in u entsteht:

$$-1 = (3u^2 + 10u)(1-u) + u^3 + 5u^2.$$

Umformen von (**) führt auf:

$$-1 = (3u^2 + 10u)(1 - u) + u^3 + 5u^2$$
 (Ausrechnen, Klammern auflösen)
 $-1 = 3u^2 - 3u^3 + 10u - 10u^2 + u^3 + 5u^2$ (Zusammenfassen)
 $-1 = -2u^3 - 2u^2 + 10u$ | $+2u^3$, $+2u^2$, $-10u$
 $2u^3 + 2u^2 + 10u - 1 = 0$ (***)

Die Gleichung (***) hat als Lösungen: $u_1 = -2,75$, $u_2 = -0,1$, $u_3 = 1,85$. Die Berührpunkte berechnen sich mit f(-2,75), f(-0,1) und f(-1,85) als:

B₁(-2,75|17,02)

 $B_2(-0.1|0.05)$

 $B_3(1,85|23,44)$,

die Tangenten als:

```
t_1: y = f'(-2.75)(x+2.75)+f(-2.75) = -4.8x+3.8
```

 t_2 : y = f'(-0,1)(x+0,1)+f(-0,1) = -0.95x-0.05,

 t_3 : y = f'(1,85)(x-1,85)+f(1,85) = 28,77x-29,77.

Alle Tangenten gehen durch den Punkt P(1|-1) (y(1) = -1) und durch den jeweiligen Berührpunkt.

www.michael-buhlmann.de / 01.2016 / Aufgabe 188