

Mathematikaufgaben

> Analysis

> Tangenten

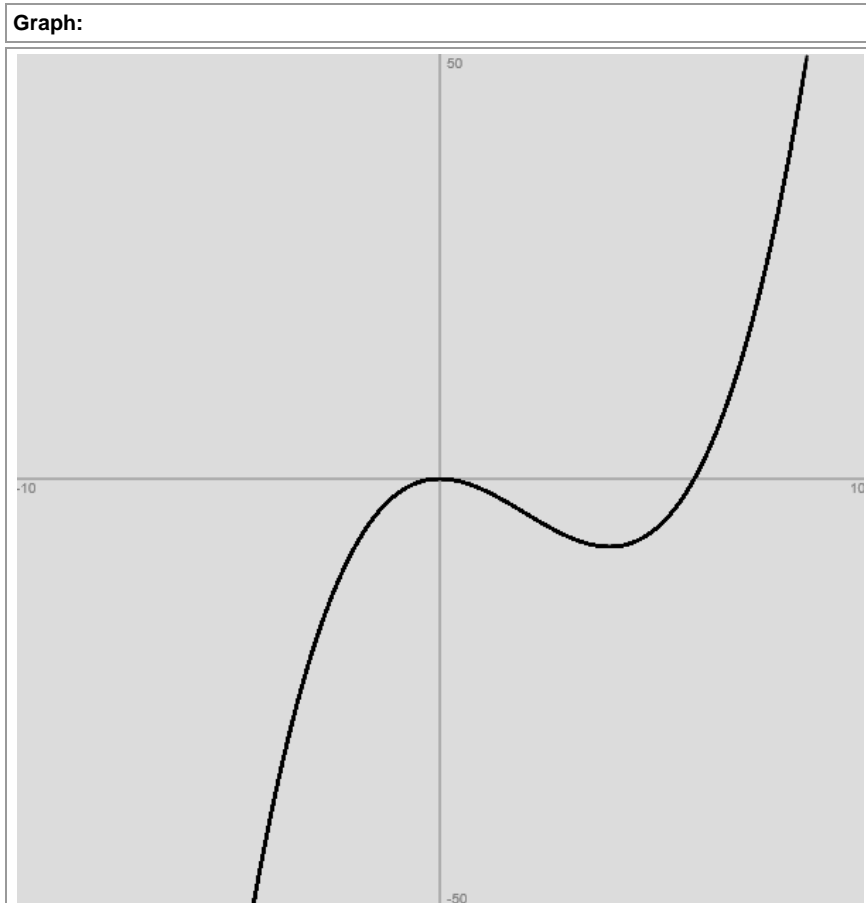
Aufgabe: Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2(x - 6).$$

Wie lauten Berührungspunkte und Tangentengleichungen, wenn vom Punkt P(0|2) Tangenten an die Funktion f(x) gelegt werden?

Lösung: I. Zunächst sind Wertetabelle und Graph der Funktion $f(x) = \frac{1}{4}x^2(x - 6)$ festzuhalten:

Wertetabelle:				
x	f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
0	0	0	-3	Nullstelle N(0 0) = Schnittpunkt S _y (0 0) = Hochpunkt H(0 0)
2	-4	-3	0	Wendepunkt W(2 -4)
4	-8	0	3	Tiefpunkt T(4 -8)
6	0	9	6	Nullstelle N(6 0)



II. In einem Berührungspunkt $B(u|f(u))$ auf der Funktion $f(x)$ muss die Tangentengleichung:

$$t: y = f'(u)(x-u) + f(u) \quad (*)$$

gelten, wobei zusätzlich ein vorgegebener Punkt $P(x_0|y_0)$ auf der Tangente liegt – der Punkt, von dem die Tangente ausgeht. Punktprobe in Gleichung (*) ergibt somit:

$$y_0 = f'(u)(x_0-u) + f(u) \quad (**)$$

und daher eine Gleichung in u , die (wenn möglich) nach u aufzulösen ist. Das aus (**) errechnete u ist die Berührstelle, $B(u|f(u))$ der gesuchte Berührungspunkt auf der Funktion $f(x)$. Die Tangente im Berührungspunkt $B(u|f(u))$ bestimmt sich dann wieder nach der Tangentenformel (*):

$$t: y = f'(u)(x-u) + f(u).$$

Aus Gleichung (**) können sich auch mehrere Berührstellen ergeben, für die dann die Tangenten zu ermitteln sind.

III. Zu $f(x) = \frac{1}{4}x^2(x-6) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2$ bilden wir die Ableitungsfunktion $f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x$. Einsetzen des vorgegebenen Punktes $P(0|2)$ in Gleichung (**) ergibt:

$$y_0 = f'(u)(x_0-u) + f(u) \quad (\text{Punktprobe: } x_0=0, y_0=2)$$

$$2 = f'(u)(0-u) + f(u)$$

$$2 = f'(u)(-u) + f(u) \quad (\text{Einsetzen von Funktion und Ableitung})$$

$$2 = \left(\frac{3}{4}u^2 - 3u\right)(-u) + \frac{1}{4}u^3 - \frac{3}{2}u^2 \quad (\text{Klammern auflösen})$$

$$2 = -\frac{3}{4}u^3 + 3u^2 + \frac{1}{4}u^3 - \frac{3}{2}u^2 \quad (\text{Zusammenfassen})$$

$$2 = -\frac{1}{2}u^3 + \frac{3}{2}u^2 \quad | -2$$

$$0 = -\frac{1}{2}u^3 + \frac{3}{2}u^2 - 2 \quad | \cdot (-2)$$

$$0 = u^3 - 3u^2 + 4 \quad (***)$$

Die kubische Gleichung (***) ist mit Polynomdivision zu lösen, wobei eine Lösung der Gleichung (durch Probieren mit Teilern von 4) als $u = -1$ ermittelt werden kann; also:

$$(u^3 - 3u^2 + 4):(u+1) = u^2 - 4u + 4.$$

$$\begin{array}{r} \underline{-(u^3+u^2)} \\ -4u^2 \\ \underline{-(-4u^2-4u)} \\ 4u+4 \\ \underline{-(4u+4)} \\ 0 \end{array}$$

Wir haben noch die Gleichung $u^2 - 4u + 4 = 0$ auszurechnen und erhalten:

$$u^2 - 4u + 4 = 0 \quad (\text{Binomische Formel})$$

$$(u-2)^2 = 0 \quad | \sqrt{\quad}$$

$$u-2 = 0 \quad | +2$$

$$u = 2.$$

Die Lösungen der Gleichung (***) sind mithin: $u_1 = -1$, $u_2 = 2$. Die Berührungspunkte berechnen sich mit $f(-1) = -7/4 = -1,75$, $f(2) = -4$ als:

$$B_1(-1|-1,75)$$

$$B_2(2|-4).$$

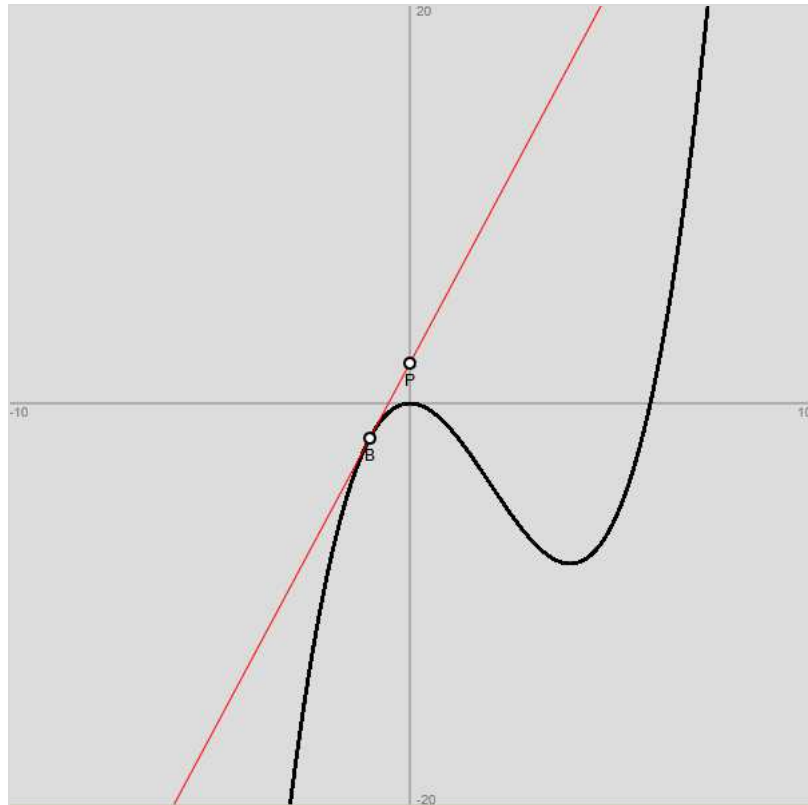
IV. Die Tangenten in den Berührungspunkten $B_1(-1|-1,75)$ und $B_2(2|-4)$ bezeichnen wir im Folgenden als t_1 und t_2 . Für die Tangente im Berührungspunkt $B_1(-1|-1,75)$ gilt:

$$t_1: y = f'(-1)(x+1)+f(1),$$

woraus wegen $f(-1) = -1,75$ und $f'(-1) = 3,75$ folgt:

$$t_1: y = 3,75(x+1) - 1,75 = 3,75x + 3,75 - 1,75 = 3,75x + 2.$$

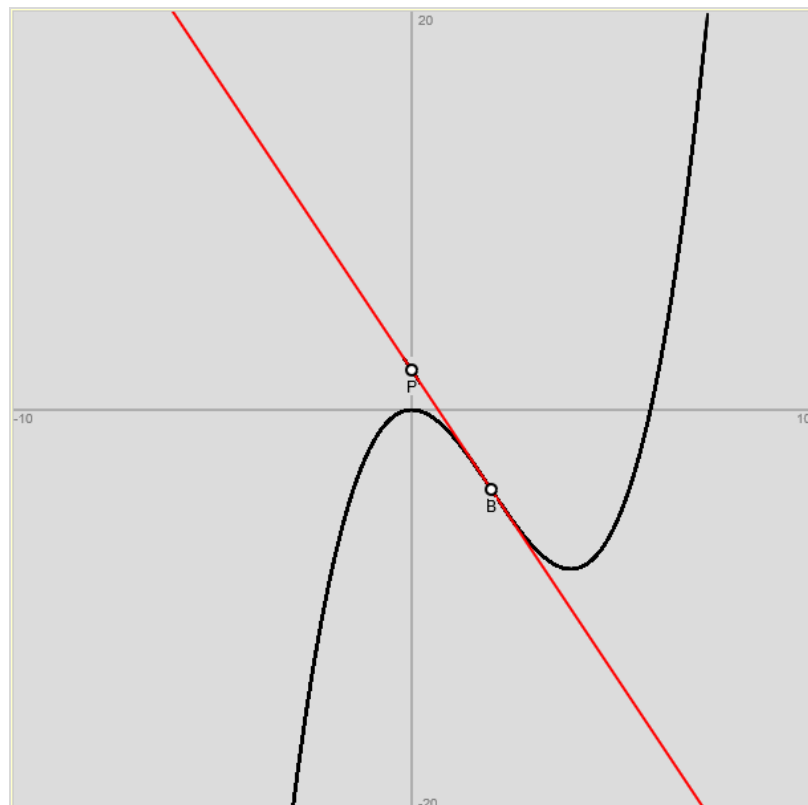
Schnell ist auf Grund des y-Achsenabschnitts der Geraden zu erkennen, dass der Punkt $P(0|2)$ auf der Tangente t_1 liegt.



Für die Tangente im Berührungspunkt $B_2(2|-4)$, dem Wendepunkt der Funktion $f(x)$, ergibt sich:

$$t_2: y = f'(2)(x-2) + f(2) = -3(x-2) - 4 = -3x + 6 - 4 = -3x + 2.$$

wegen $f(2) = -4$ und $f'(2) = -3$.



Alle zwei Tangenten gehen durch den Punkt $P(0|2)$ und durch den jeweiligen Berührungspunkt.