Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Tangenten

Aufgabe: Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2(x-6).$$

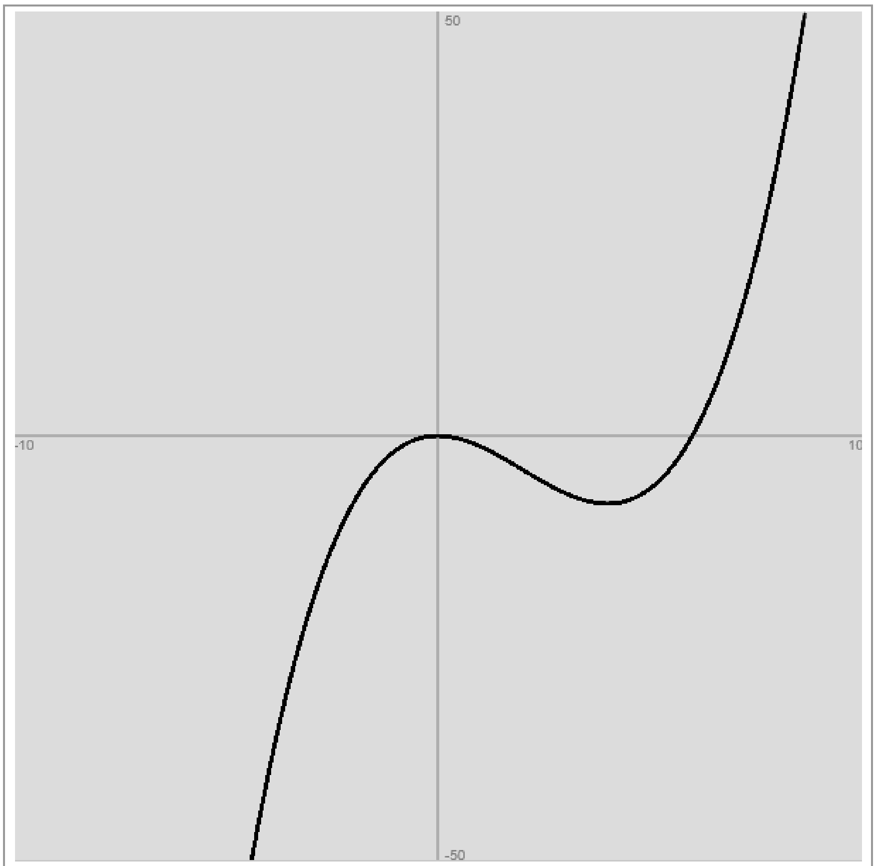
Wie lauten Berührpunkte und Tangentengleichungen, wenn vom Punkt P(0|2) Tangenten an die Funktion f(x) gelegt werden?

Lösung: I. Zunächst sind Wertetabelle und Graph der Funktion $f(x) = \frac{1}{4}x^2(x-6)$ festzuhalten:

Wertetabelle:

x	f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
0	0	0	-3	Nullstelle N(0|0) = Schnittpunkt S_y(0|0) = Hochpunkt H(0|0)
2	-4	-3	0	Wendepunkt W(2|-4)
4	-8	0	3	Tiefpunkt T(4|-8)
6	0	9	6	Nullstelle N(6|0)

Graph:



II. In einem Berührpunkt B(u|f(u)) auf der Funktion f(x) muss die Tangentengleichung:

t: y = f'(u)(x-u) + f(u) (*)

gelten, wobei zusätzlich ein vorgegebener Punkt $P(x_0|y_0)$ auf der Tangente liegt – der Punkt, von dem die Tangente ausgeht. Punktprobe in Gleichung (*) ergibt somit:

$y_0 = f'(u)(x_0-u) + f(u)$ (**)

und daher eine Gleichung in u, die (wenn möglich) nach u aufzulösen ist. Das aus (**) errechnete u ist die Berührstelle, B(u|f(u)) der gesuchte Berührpunkt auf der Funktion f(x). Die Tangente im Berührpunkt B(u|f(u)) bestimmt sich dann wieder nach der Tangentenformel (*):

t: y = f'(u)(x-u) + f(u).

Aus Gleichung (**) können sich auch mehrere Berührstellen ergeben, für die dann die Tangenten zu ermitteln sind.

III. Zu $f(x)=\frac{1}{4}x^2(x-6)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{2}x^2$ bilden wir die Ableitungsfunktion $f'(x)=\frac{3}{4}x^2-3x$. Einsetzen des vorgegebenen Punktes P(0|2) in Gleichung (**) ergibt:

$y_0 = f'(u)(x_0-u) + f(u)$ (Punktprobe: $x_0=0$, $y_0=2$)
$2 = f'(u)(0-u) + f(u)$
$2 = f'(u)(-u) + f(u)$ (Einsetzen von Funktion und Ableitung)
$2=(\frac{3}{4}u^2-3u)(-u)+\frac{1}{4}u^3-\frac{3}{2}u^2$ (Klammern auflösen)
$2=-\frac{3}{4}u^3+3u^2+\frac{1}{4}u^3-\frac{3}{2}u^2$ (Zusammenfassen)
$2=-\frac{1}{2}u^3+\frac{3}{2}u^2$ | -2
$0=-\frac{1}{2}u^3+\frac{3}{2}u^2-2$ | ·(-2)
$0 = u^3 - 3u^2 + 4$ (***)

Die kubische Gleichung (***) ist mit Polynomdivision zu lösen, wobei eine Lösung der Gleichung (durch Probieren mit Teilern von 4) als u = -1 ermittelt werden kann; also:

$(u^3 - 3u^2 + 4):(u+1) = u^2 - 4u + 4.$
$\underline{-(u^3+u^2)}$
$-4u^2$
$\underline{-(-4u^2-4u)}$
$4u+4$
$\underline{-(4u+4)}$
0

Wir haben noch die Gleichung $u^2 - 4u + 4 = 0$ auszurechnen und erhalten:

$u^2 - 4u + 4 = 0$ (Binomische Formel)
$(u-2)^2 = 0$ | √
$u-2 = 0$ | +2
u = 2.

Die Lösungen der Gleichung (***) sind mithin: $u_1 = -1$, $u_2 = 2$. Die Berührpunkte berechnen sich mit f(-1) = -7/4 = -1,75, f(2) = -4 als:

$B_1(-1|-1{,}75)$
$B_2(2|-4)$.

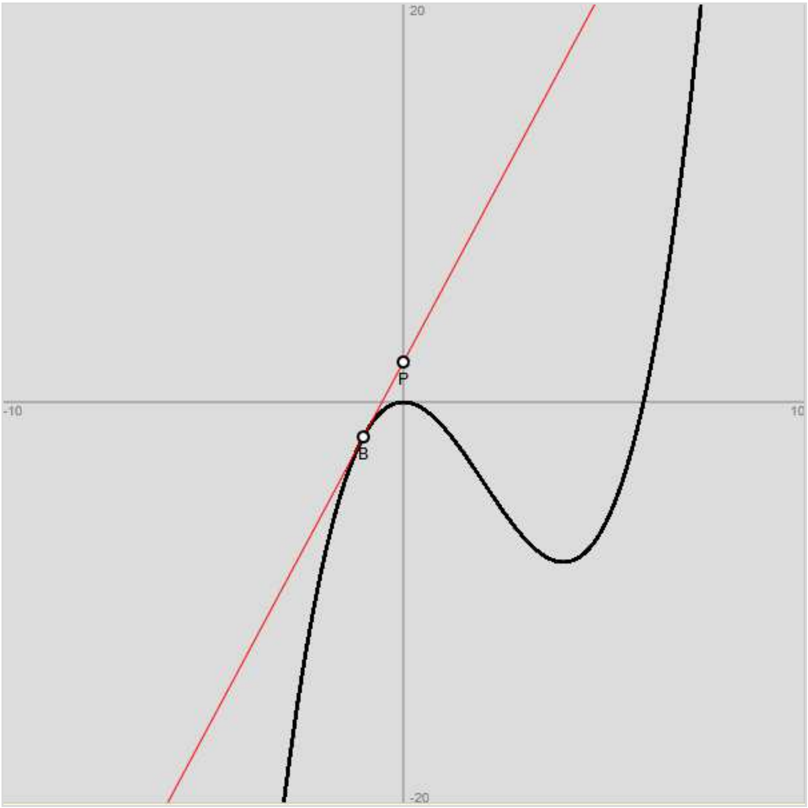
IV. Die Tangenten in den Berührpunkten $B_1(-1|-1{,}75)$ und $B_2(2|-4)$ bezeichnen wir im Folgenden als t_1 und t_2. Für die Tangente im Berührpunkt $B_1(-1|-1{,}75)$ gilt:

t_1: y = f'(-1)(x+1)+f(1),

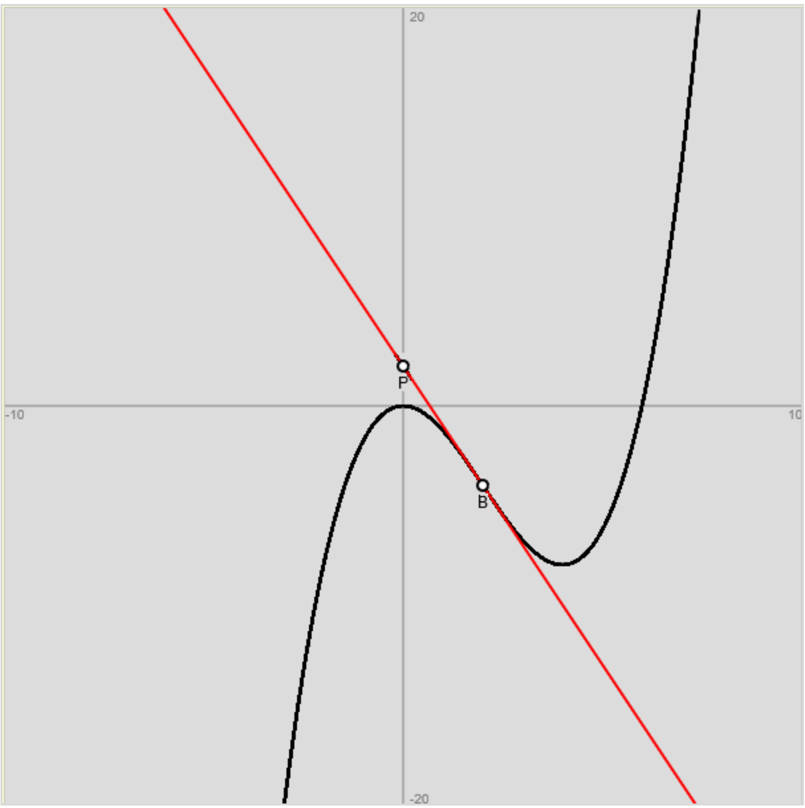
woraus wegen f(-1) = -1,75 und f'(-1) = 3,75 folgt:

t_1: y = 3,75(x+1) – 1,75 = 3,75x + 3,75 – 1,75 = 3,75x + 2.

Schnell ist auf Grund des y-Achsenabschnitts der Geraden zu erkennen, dass der Punkt P(0|2) auf der Tangente t_1 liegt.



Für die Tangente im Berührpunkt $B_2(2|-4)$, dem Wendepunkt der Funktion f(x), ergibt sich:
t_2: y = f'(2)(x–2)+f(2) = -3(x–2) – 4 = -3x + 6 – 4 = -3x + 2.
wegen f(2) = -4 und f'(2) = -3.



Alle zwei Tangenten gehen durch den Punkt P(0|2) und durch den jeweiligen Berührpunkt.

www.michael-buhlmann.de / 02.2017 / Aufgabe 310