Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Tangenten

Aufgabe: Berechne die Gleichung der Tangente an die Funktion f(x) an der Stelle x_0:

$$f(x) = \cos(x) + 2,\ x_0 = 3\pi/2.$$

1. Lösung (mit der Geradengleichung): I. Allgemein gilt für die gesuchte Tangente an der Stelle x_0 bzw. im Punkt $P(x_0|f(x_0))$ die Geradengleichung $y = mx + c$; m ist dann die Tangentensteigung $m = f'(x_0)$, c der y-Achsenabschnitt der Tangente u.a. mit $c = f(x_0) – f'(x_0)\cdot x_0$.

II. Aus $f(x) = \cos(x) + 2$ erhalten wir mit der Faktorregel und der Regel für die Kosinusfunktion die Ableitungsfunktion $f'(x) = -\sin(x)$. Wir benötigen auf Grund der vorgegebenen Stelle $x_0 = 3\pi/2$ den Funktionswert und den Wert der Ableitung dort, also:

$f(3\pi/2) = \cos(3\pi/2) + 2 = 0 + 2 = 2$
$f'(3\pi/2) = -\sin(3\pi/2) = -(-1) = 1.$

Daneben benötigen wir die Geradengleichung der Tangente t: $y = mx + c$. Es gilt weiter:

$m = f'(3\pi/2) = 1,$

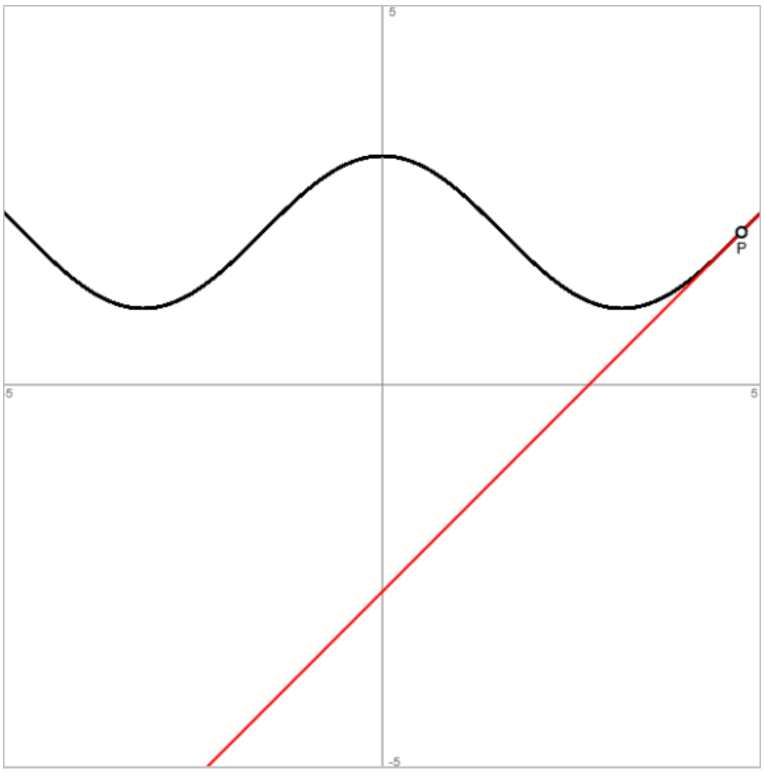
so dass t: $y = 1\cdot x + c = x+ c$ gilt. Wegen:

$f(3\pi/2) = 2$

wird die Tangente im Punkt $P(3\pi/2|2)$ errechnet. Punktprobe mit $x = 3\pi/2$ und $y = 2$ ergibt mit dem Einsetzen in die Geradengleichung den Wert für den y-Achsenabschnitt c:

$2 = 3\pi/2 + c \Leftrightarrow 2 –\cdot 3\pi/2 = c.$

Die gesuchte Tangentengleichung lautet also: t: $y = x + 2 – 3\pi/2 \approx x – 2{,}7124$.



2. Lösung (mit der Geradengleichung): I. Allgemein gilt für die gesuchte Tangente an der Stelle x_0 bzw. im Punkt $P(x_0|f(x_0))$ die Geradengleichung $y = mx + b$; m ist dann die Tangentensteigung $m = f'(x_0)$, b der y-Achsenabschnitt der Tangente u.a. mit $b = f(x_0) – f'(x_0) \cdot x_0$.

II. Aus $f(x) = \cos(x) + 2$ erhalten wir mit der Faktorregel und der Regel für die Kossinusfunktion die Ableitungsfunktion $f'(x) = -\sin(x)$. Wir benötigen auf Grund der vorgegebenen Stelle $x_0 = 3\pi/2$ den Funktionswert und den Wert der Ableitung dort, also:

$f(3\pi/2) = \cos(3\pi/2) + 2 = 0 + 2 = 2$
$f'(3\pi/2) = -\sin(3\pi/2) = -(-1) = 1$.

Daneben benötigen wir die Geradengleichung der Tangente t: $y = mx + b$. Es gilt weiter:

$m = f'(3\pi/2) = 1$,

so dass t: $y = 1 \cdot x + b = x + b$ gilt. Wegen:

$f(3\pi/2) = 2$

wird die Tangente im Punkt $P(3\pi/2|2)$ errechnet. Punktprobe mit $x = 3\pi/2$ und $y = 2$ ergibt mit dem Einsetzen in die Geradengleichung den Wert für den y-Achsenabschnitt b:

$2 = 3\pi/2 + b \Leftrightarrow 2 – 3\pi/2 = b$.

Die gesuchte Tangentengleichung lautet also: t: $y = x + 2 – 3\pi/2 \approx x – 2,7124$.

3. Lösung (mit der Tangentenformel): I. Allgemein gilt die Formel der Tangentengleichung:

t: $y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$

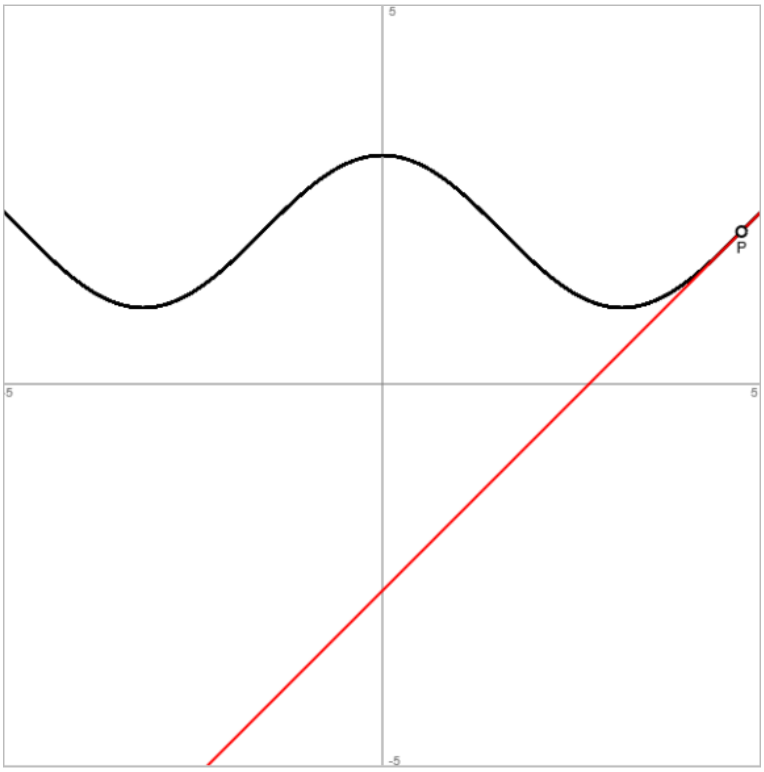
mit Funktion f(x), Ableitungsfunktion f'(x) und t als Tangente an die Funktion f(x) an der Stelle x_0.

II. Wir berechnen aus Funktion $f(x) = \cos(x) + 2$ und Ableitung $f'(x) = -\sin(x)$ die Werte:

$f(3\pi/2) = \cos(3\pi/2) + 2 = 0 + 2 = 2$
$f'(3\pi/2) = -\sin(3\pi/2) = -(-1) = 1$.

Die Tangente an die Funktion an der Stelle $x_0 = 3\pi/2$ lautet mittels Einsetzen von $f(3\pi/2)$ und $f'(3\pi/2)$ in die Tangentengleichung:

t: $y = f'(3\pi/2)(x–3\pi/2) + f(3\pi/2) = 1 \cdot (x–3\pi/2) + 2 = x – 3\pi/2 + 2 \approx x – 2,7124$.



www.michael-buhlmann.de / 10.2018 / Aufgabe 631