**Michael Buhlmann**

# Mathematikaufgaben
## > Analysis
## > Tangenten

---

**Aufgabe**: Bestimme die Punkte, in denen die Funktion:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - x$$

die Steigung m = 4 besitzt. Berechne zudem die jeweiligen Tangentengleichungen.

**Lösung**: I. Allgemein ergibt sich als Vorgehensweise zur Berechnung der Stellen $x_1$, $x_2$, …, in denen eine vorgegebene Funktion die Steigung m besitzt, die Bildung der 1. Ableitung und das Umstellen der folgenden Gleichung nach x:

$$f'(x) = m \rightarrow x_1, x_2, \ldots$$

Einsetzen von $x_1$, $x_2$, … in die Funktionsgleichung führt auf die gesuchten <u>Punkte</u> $P(x_1|f(x_1))$, $Q(x_2|f(x_2))$, … mit $f'(x_1) = f'(x_2) = \ldots = m$.

II. Wir bilden die 1. Ableitung f'(x) der vorgegebenen Funktion $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - x$ und erhalten:

$f'(x) = x^2 + 4x - 1$. Gleichsetzen der Ableitung mit der vorgegebenen Steigung m = 4 ergibt:

$$f'(x) = m \Leftrightarrow x^2 + 4x - 1 = 4 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{-4 \pm 6}{2}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = \frac{-4-6}{2} = \frac{-10}{2} = -5,\ x_2 = \frac{-4+6}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

Wegen $f(-5) = \frac{40}{3}$, $f(1) = \frac{4}{3}$ folgt für die gesuchten <u>Punkte</u> mit Steigung m = 4: $P(-5|\frac{40}{3})$, $Q(1|\frac{4}{3})$.

III. Allgemein gilt für die gesuchte <u>Tangente</u> an einer Stelle $x_0$ bzw. im Punkt $P(x_0|f(x_0))$ die Geradengleichung t: y = mx + c; m ist dann die Tangentensteigung $m = f'(x_0)$, c der y-Achsenabschnitt der Tangente mit $c = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$.

IV. Es gilt gemäß der Aufgabenstellung (f'(x) = m) für die <u>Tangenten</u> in den Punkten $P(-5|\frac{40}{3})$, $Q(1|\frac{4}{3})$ an die Funktion $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - x$ die Beziehung:

f'(-5) = f'(1) = 4,

so dass das Folgende zur Berechnung der Tangentengleichungen trägt:

<u>$x_1$=-5</u>: Wegen f'(-5) = 4 = m und der allgemeinen Geradengleichung $t_1$: y = mx + c lässt sich hier m durch 4 ersetzen; also folgt:

$t_1$: y = 4x + c.

Punktprobe mit dem Punkt $P(-5|\frac{40}{3})$ führt durch Einsetzen von x = -5 und $y = \frac{40}{3}$ auf die Berechnung von c:

y = 4x + c -> $\frac{40}{3}$ = 4·(-5) + c ⇔ $\frac{40}{3}$ = -20 + c ⇔ c = $\frac{100}{3}$.

Die Tangentengleichung für den Punkt P(-5|$\frac{40}{3}$) lautet damit:

$t_1$: y = 4x + $\frac{100}{3}$.

<u>$x_2$=1</u>: Wegen f'(1) = 4 = m und der allgemeinen Geradengleichung $t_1$: y = mx + c lässt sich hier m durch 4 ersetzen; also folgt:

$t_2$: y = 4x + c.

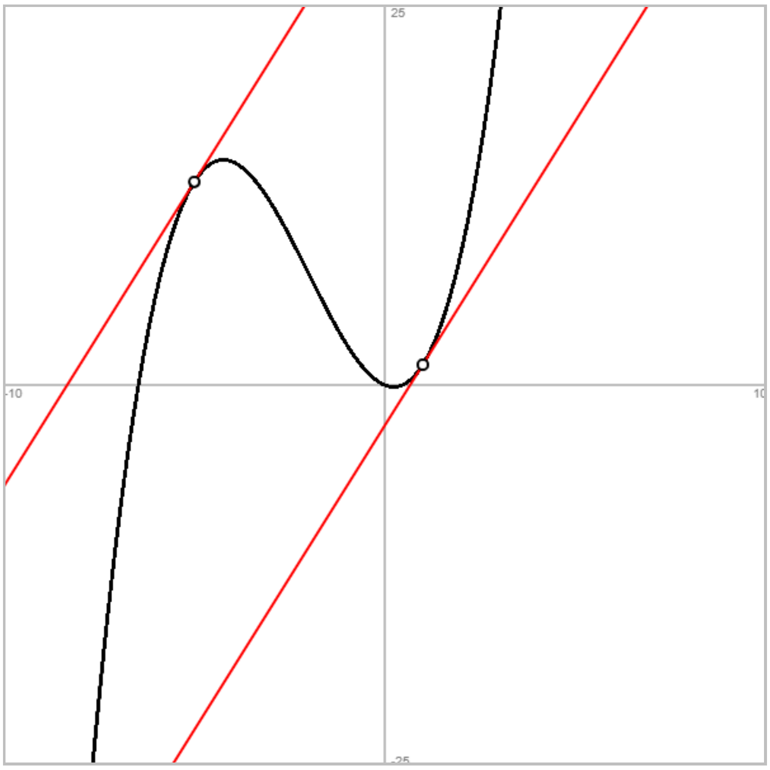
Punktprobe mit dem Punkt Q(1|$\frac{4}{3}$) führt durch Einsetzen von x = 1 und y = $\frac{4}{3}$ auf die Berechnung von c:

y = 4x + c -> $\frac{4}{3}$ = 4·1 + c ⇔ $\frac{4}{3}$ = 4 + c ⇔ c = $-\frac{8}{3}$.

Die Tangentengleichung für den Punkt Q(1|$\frac{4}{3}$) lautet damit:

$t_2$: y = 4x – $\frac{8}{3}$.

Dies sind die gesuchten Tangentengleichungen.




www.michael-buhlmann.de / 10.2023 / Aufgabe 1902