

Mathematikaufgaben

> Analysis

> Tangenten

Aufgabe: Berechne die Gleichung der Tangente an die Funktion $f(x) = 4 - 4e^{-0,5x-2}$ an der Nullstelle der Funktion.

Lösung: I. Allgemein gilt für die gesuchte Tangente an der Stelle x_0 bzw. im Punkt $P(x_0|f(x_0))$ die Geradengleichung $t: y = mx + c$; m ist dann die Tangentensteigung $m = f'(x_0)$, c der y-Achsenabschnitt der Tangente mit $c = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$.

II. Die Berechnung der Nullstelle der Funktion $f(x) = 4 - 4e^{-0,5x-2}$ ergibt:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 4 - 4e^{-0,5x-2} = 0 \Leftrightarrow 4 = 4e^{-0,5x-2} \Leftrightarrow 1 = e^{-0,5x-2} \Leftrightarrow 0 = -0,5x - 2 \Leftrightarrow 0,5x = -2 \Leftrightarrow x = -4.$$

III. Aus $f(x) = 4 - 4e^{-0,5x-2}$ erhalten wir die Ableitungsfunktion:

$$f'(x) = 0 - 4 \cdot (-0,5) \cdot e^{-0,5x-2} = 2e^{-0,5x-2}.$$

Es ist nun $x_0 = -4$ als Nullstelle von $f(x)$ die vorgegebene Stelle, an der die Tangente berechnet werden soll. Die Werte von Funktion und Ableitung sind damit:

$$f(-4) = 0 \text{ (wegen der Nullstelle)}, f'(-4) = 2e^{-0,5 \cdot (-4) - 2} = 2e^0 = 2 \cdot 1 = 2.$$

Daneben trägt der Ansatz $t: y = mx + c$ für die Tangentengleichung. Es gilt weiter: $m = f'(-4) = 2$, so dass $t: y = 2x + c$ folgt. Wegen $f(-4) = 0$ wird die Tangente im Punkt $P(-4|0)$ errechnet. Punktprobe mit $x=-4$ und $y=0$ ergibt mit dem Einsetzen in die Tangentengleichung den Wert für den y-Achsenabschnitt c :

$$0 = 2 \cdot (-4) + c \Leftrightarrow 0 = -8 + c \Leftrightarrow 8 = c.$$

Die gesuchte Tangentengleichung lautet also: $t: y = 2x + 8$.

