Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Tangenten/Normalen

Aufgabe: Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 2x^2$.

a) Für die Stelle x_0=2 sollen Tangente und Normale an f(x) im Punkt $P(x_0|f(x_0))$ bestimmt werden.

b) Wie groß sind Umfang und Flächen der Dreiecke zwischen Tangente, Normale und x-/y-Koordinatenachse?

Lösung: a) Es gilt zunächst:

Tangentengleichung: t: $y_t = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = f(2)(x-2) + f(2)$

Normalengleichung: n: $y_n = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0) = -\frac{1}{f(2)}(x-2) + f(2)$

Mit f(2) = -6, f'(2) = -5 folgt: Punkt P(2|-6), weiter: Tangentensteigung m_t = -5, Normalensteigung m_n = -1/(-5) = 0.2 sowie:

<u>Tangente</u> t: y_t = -5x + 4
<u>Normale</u> n: y_n = 0.2x – 6.4

b) I. Die gesuchten Dreiecke definieren sich so:

Dreieck PS_tS_y mit y-Achsenabschnittspunkten $S_t(0|y_t(0))$, $S_n(0|y_n(0))$
Dreieck PN_tN_n mit Nullstellen $N_t(x_t|0)$, $N_n(x_n|0)$ ($y_t = 0 \Rightarrow x = x_t$, $y_n = 0 \Rightarrow x = x_n$)

Dreiecksumfang: u = a + b + g (g: Grundseite)
Dreieckfläche: A = gh/2 (h: Höhe)

II. Damit ergibt sich:

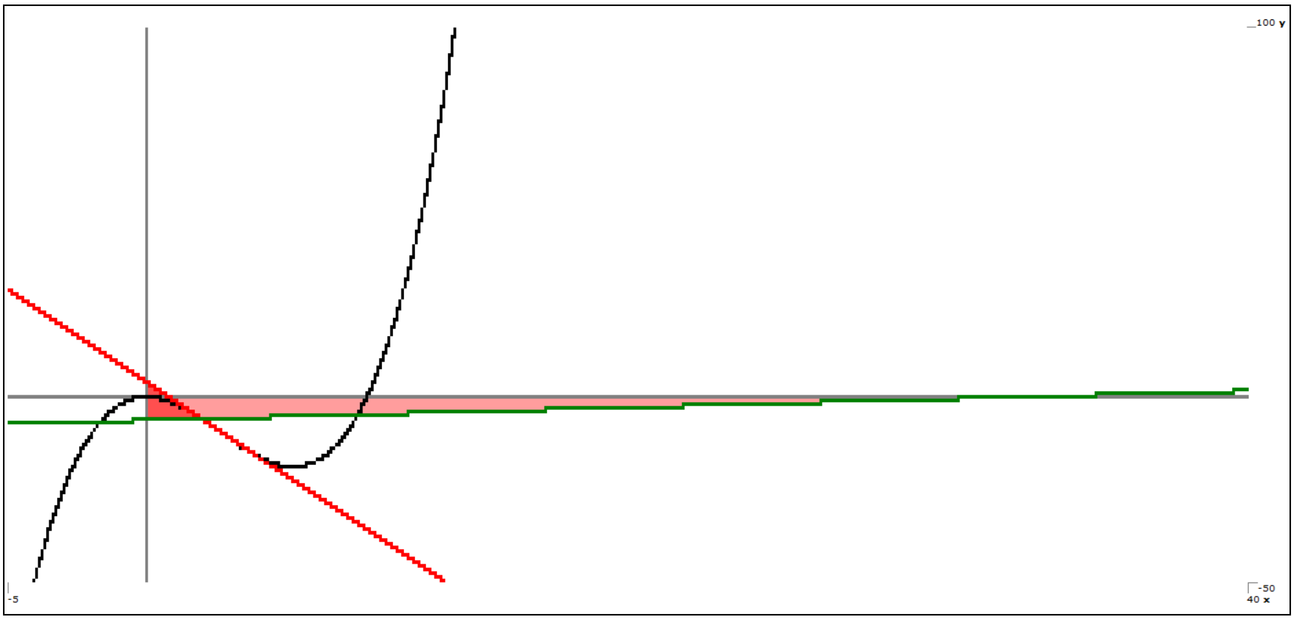
Funktion: f(x) = x^3/4-2x^2, Punkt: P(2|-6), Tangente: y_t = -5x + 4, Normale: y_n = 0.2x – 6.4

Und weiter:

<u>Dreieck zwischen Tangente, Normale, y-Achse</u>:
$y_t(0) = 4 \Rightarrow S_t(0|4)$
$y_n(0) = -6.4 \Rightarrow S_n(0|-6.4)$
Dreieck P(2|-6) $S_t(0|4)$ $S_n(0|-6.4)$ =>
Seite a = $d(P,S_t) = ((0-x_0)^2+(y_t-y_0)^2)^{1/2}$ = 10.198, Seite b = $d(P,S_n) = ((0-x_0)^2+(y_n-y_0)^2)^{1/2}$ = 2.0396,
Grundseite g = $|y_t(0)-y_n(0)|$ = 10.4; Höhe h = $|x_0|$ = 2
=> Dreiecksumfang u_1 = a+b+g = 22.6376, Dreieckfläche A_1 = gh/2 = 10.4

<u>Dreieck zwischen Tangente, Normale, x-Achse</u>:
$y_t(x) = 0 \Rightarrow x_t = 0.8 \Rightarrow N_t(0.8|0)$
$y_n(x) = 0 \Rightarrow x_n = 32 \Rightarrow N_n(32|0)$
Dreieck P(2|-6) $N_t(4|0)$ $N_n(-6.4|0)$ =>
Seite a = $d(P,N_t) = ((x_t-x_0)^2+(0-y_0)^2)^{1/2}$ = 6.1188, Seite b = $d(P,N_n) = ((x_n-x_0)^2+(0-y_0)^2)^{1/2}$ = 30.5941,
Grundseite g = $|x_t-x_n|$ = 31.2; Höhe h = $|f(x_0)|$ = 6
=> Dreiecksumfang u_2 = a+b+g = 67.9129, Dreieckfläche A_2 = gh/2 = 93.6

III. Graph: $y = f(x) = x^3/4-2x^2$, Tangente $y_t = -5x + 4$, Normale $y_n = 0.2x - 6.4$, Dreieckflächen



07.2014 / Aufgabe 15