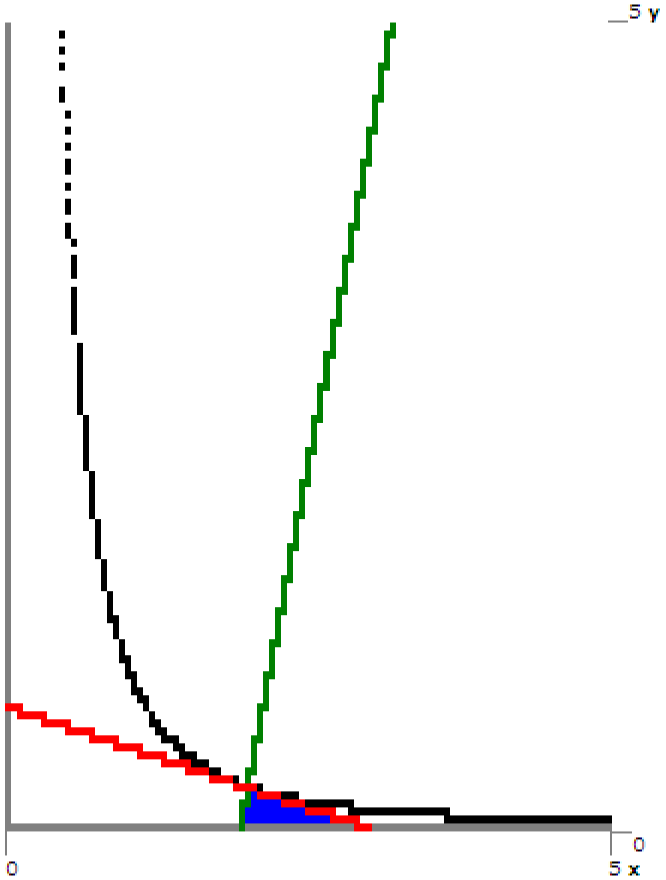
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Tangenten/Normalen

Aufgabe: Für die Hyperbel $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ist dasjenige x_0>0 zu bestimmen, so dass das aus Tangente und Normale gebildete Dreieck oberhalb der x-Achse den größten Flächeninhalt A besitzt? Wie groß ist A?



Lösung: I. Aus der Ableitung: $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$ folgen die relevanten Werte für x_0 = a: $f(a) = \frac{1}{a^2}$,

$f'(a) = -\frac{2}{a^3}$, a>0.

II. Die Tangente errechnet sich dann aus: t: y = f'(a)(x–a) + f(a) als:

t: $y = -\frac{2}{a^3}(x-a) + \frac{1}{a^2} = -\frac{2}{a^3}x + \frac{2}{a^2} + \frac{1}{a^2} = -\frac{1}{a^3}x + \frac{3}{a^2}$,

die Normale aus: n: y = -(x-a)/f'(a) + f(a) als:

n: $y = \frac{a^3}{2}(x-a) + \frac{1}{a^2} = \frac{a^3}{2}x - \frac{a^4}{2} + \frac{1}{a^2}$.

III. Die Schnittstellen der beiden der Geraden mit der x-Achse sind zu berechnen:

Nullstelle der Tangente: $y = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{a^3}x + \frac{3}{a^2} = 0 \Leftrightarrow -x + 3a = 0 \;\Leftrightarrow x = 3a$.

Nullstelle der Normale: $y = 0 \Leftrightarrow \frac{a^3}{2}x - \frac{a^4}{2} + \frac{1}{a^2} = 0 \Leftrightarrow$

$\frac{a^3}{2}x = \frac{a^4}{2} - \frac{1}{a^2} \Leftrightarrow x = \frac{2}{a^3}\left(\frac{a^4}{2} - \frac{1}{a^2}\right) \Leftrightarrow x = a - \frac{2}{a^5}$.

Die Schnittstellen lauten also: $x_1 = a - \frac{2}{a^5}$, $x_2 = 3a$.

IV. Der Flächeninhalt des von der Tangente, der Normale und der x-Achse gebildeten Dreiecks errechnet sich gemäß: $A = \frac{gh}{2}$ mit: $g = x_2 - x_1 = 3a - (a - \frac{2}{a^5}) = 2a - \frac{2}{a^5}$, $h = f(a) = \frac{1}{a^2}$, also:

$A = A(a) = \frac{1}{2}(2a - \frac{2}{a^5}) \cdot \frac{1}{a^2} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a^7}$.

V. Für die Bestimmung des Flächenmaximums folgt aus: $A(a) = a^{-1} - a^{-7}$ die Ableitung:

$A'(a) = -a^{-2} + 7a^{-8} = -\frac{1}{a^2} + \frac{7}{a^8} = 0 \Leftrightarrow -a^6 + 7 = 0 \Leftrightarrow a^6 = 7 \Leftrightarrow a = \pm\sqrt[6]{7}$

(notwendige Bedingung),

also: $x_0 = a = \sqrt[6]{7}$ mit:

$A''(a) = 2a^{-3} - 56a^{-9}$ und $A''(\sqrt[6]{7}) = \frac{2}{\sqrt{7}} - \frac{56}{7\sqrt{7}} = \frac{2}{\sqrt{7}} - \frac{8}{\sqrt{7}} = -\frac{6}{\sqrt{7}} < 0$

(hinreichende Bedingung)

als Hochpunkt.

VI. Das Flächenmaximum ergibt sich aus dem Flächeninhalt:

$A(\sqrt[6]{7}) = \frac{1}{\sqrt[6]{7}} - \frac{1}{(\sqrt[6]{7})^7} = \frac{1}{\sqrt[6]{7}}(1 - \frac{1}{7}) = \frac{6}{7\sqrt[6]{7}}$.

07.2014 / Aufgabe 16