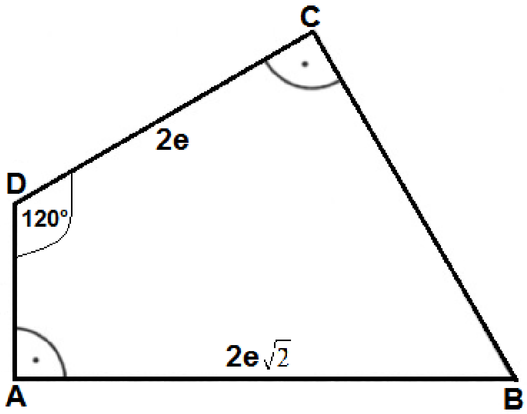
**Michael Buhlmann**

# Mathematikaufgaben
## > Geometrie/Trigonometrie
## > Viereck (exakte Berechnung)

---

**Aufgabe**: Im Viereck ABCD ist die Seite zwischen A und B $2e\sqrt{2}$ lang, die Seite zwischen C und D 2e. Rechte Winkel liegen an den Ecken A und C vor, für den Winkel an der Ecke D gilt: δ = 120°.




Zeige ohne Verwendung gerundeter Werte, dass der Umfang des Vierecks ABCD

$$u_{ABCD} = 2e\left(3\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{6} - 1\right)$$

beträgt.

**Lösung**: I. Die Formvariable e steht in der Geometrie und Trigonometrie für eine beliebige reelle Zahl, die die Grundlage einer geometrisch-trigonometrischen und daher exakten Formel bildet. Seitenlängen sind dabei Vielfaches von e, Flächen Vielfaches von $e^2$. Bei Anwendung von Trigonometrie und Satz des Pythagoras treten dann Ausdrücke vom Typ

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = \sqrt{a}^2 = a \quad \text{(Wurzel und Quadrat)}$$

$$\sqrt{ae^2} = e\sqrt{a} = ne\sqrt{a_1} \quad \text{(teilweises Wurzelziehen)}$$

und

$$\frac{e}{\sqrt{a}} = \frac{e}{a}\sqrt{a} \quad \text{(Ganzrationalmachen des Nenners)}$$

auf. Im Bereich der trigonometrischen Funktionen sind die exakten Werte von Sinus, Kosinus und Tangens für spezielle Winkel wichtig:

$$\sin 30° = \frac{1}{2},\ \sin 45° = \frac{1}{2}\sqrt{2},\ \sin 60° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\cos 30° = \frac{1}{2}\sqrt{3},\ \cos 45° = \frac{1}{2}\sqrt{2},\ \cos 60° = \frac{1}{2}$$

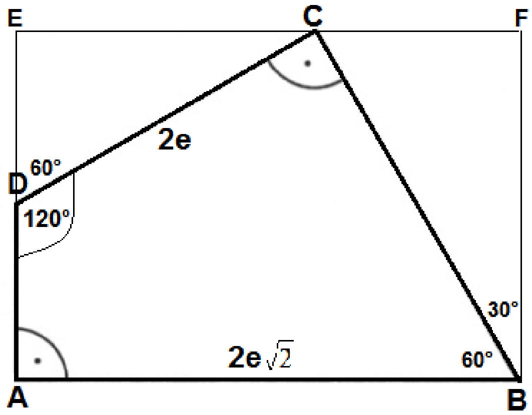
$$\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},\ \tan 45° = 1,\ \tan 60° = \sqrt{3}$$

Zu beachten ist auch, dass ein 45°-Winkel in einem rechtwinkligen Dreieck auf ein gleichschenkliges Dreieck hinweist, ein 30°- oder 60°-Winkel auf ein gleichseitiges Dreieck, dessen eine Hälfte das Dreieck mit dem 30°- oder 60°-Winkel ist. Schließlich gelten noch in einem rechtwinkligen Dreieck die trigonometrischen Beziehungen:

$$\sin\varphi = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse},\ \cos\varphi = \frac{Ankathete}{Hypotenuse},\ \tan\varphi = \frac{Gegenkathete}{Ankathete}$$

für Dreieckswinkel φ kleiner dem rechten Winkel.

II. Wir ergänzen zunächst das Viereck ABCD durch rechtwinklige Außendreiecke mit den zusätzlichen Ecken E und F:




Der Nebenwinkel bei D ist: $\delta_1$ = 180°–120° = 60°, der Winkel β bei B errechnet sich auf Grund der Winkelsumme von 360° im Viereck als: β = 360°–2·90°–120° = 60°, so dass der Winkel $\beta_1$ bei B $\beta_1$ = 90°–60° = 30° beträgt.

III. Wir betrachten das rechtwinklige Dreieck CDE mit dem Winkel $\delta_1$ = 60° und der Hypotenuse $\overline{CD} = 2e$. Es gilt:

$$\sin\delta_1 = \frac{\overline{CE}}{\overline{CD}} \Rightarrow \sin 60° = \frac{\overline{CE}}{2e} \Rightarrow \overline{CE} = 2e\cdot\sin 60° = 2e\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3} = e\sqrt{3}$$

$$\cos\delta_1 = \frac{\overline{DE}}{\overline{CD}} \Rightarrow \cos 60° = \frac{\overline{DE}}{2e} \Rightarrow \overline{DE} = 2e\cdot\cos 60° = 2e\cdot\frac{1}{2} = e\,.$$

IV. Für das rechtwinklige Dreieck BCF erhalten wir wegen

$$\overline{CF} = \overline{AB} - \overline{CE} = 2e\sqrt{2} - e\sqrt{3} = e(2\sqrt{2}-\sqrt{3})$$

die Längen der Strecken $\overline{BC}$ und $\overline{BF}$:

$$\sin\beta_1 = \frac{\overline{CF}}{\overline{BC}} \Rightarrow \sin 30° = \frac{e(2\sqrt{2}-\sqrt{3})}{\overline{BC}} \Rightarrow \overline{BC} = \frac{e(2\sqrt{2}-\sqrt{3})}{\sin 30°} = \frac{e(2\sqrt{2}-\sqrt{3})}{\frac{1}{2}} = 2e(2\sqrt{2}-\sqrt{3})$$

$$\cos\beta_1 = \frac{\overline{BF}}{\overline{BC}} \Rightarrow \cos 30° = \frac{\overline{BF}}{2e(2\sqrt{2}-\sqrt{3})} \Rightarrow$$

$$\overline{BF} = 2e(2\sqrt{2}-\sqrt{3})\cdot\cos 30° = 2e(2\sqrt{2}-\sqrt{3})\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3} = e(2\sqrt{2}-\sqrt{3})\cdot\sqrt{3} = e(2\sqrt{6}-3).$$

IV. Zur Berechnung des gesuchten Umfangs des Vierecks ABCD fehlt noch die Viereckseite $\overline{AD}$, die wir wie folgt bestimmen:

$$\overline{AD} = \overline{BF} - \overline{DE} = e(2\sqrt{6}-3) - e = e(2\sqrt{6}-3-1) = e(2\sqrt{6}-4)\,.$$

Damit ergibt sich für den Umfang:

$$u_{ABCD} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{AD} = 2e\sqrt{2} + 2e(2\sqrt{2} - \sqrt{3}) + 2e + 2e(\sqrt{6} - 2) =$$
$$2e(\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - \sqrt{3} + 1 + \sqrt{6} - 2) = 2e\left(3\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{6} - 1\right)$$

und daher das gewünschte Resultat.

www.michael-buhlmann.de / 04.2017 / Aufgabe 336