

Mathematikaufgaben

> Geometrie/Trigonometrie

> Rechtwinkliges Dreieck

Aufgabe: Im rechtwinkligen Dreieck $\triangle ABC$ ist die Hypotenuse $c = 8$ cm sowie der Winkel $\beta = 40,5^\circ$ gegeben ($\gamma = 90^\circ$). Berechne die fehlenden Größen, den Umfang und den Flächeninhalt des Dreiecks.

Lösung: I. In einem rechtwinkligen Dreieck $\triangle ABC$ mit den Seiten a, b, c und den Winkeln α, β, γ bei $\gamma = 90^\circ$ heißen a und b Katheten, c Hypotenuse. Die Kathete, die gegenüber einem Winkel α oder β liegt, heißt Gegenkathete (bei Winkel α Seite a , bei Winkel β Seite b), die Kathete, die an einem Winkel α oder β liegt, heißt Ankathete (bei Winkel α Seite b , bei Winkel β Seite a). Dann gelten der Satz des Pythagoras:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (\text{Hypotenuse})$$

$$a^2 = c^2 - b^2 \Rightarrow a = \sqrt{c^2 - b^2} \quad (\text{Kathete})$$

$$b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2} \quad (\text{Kathete})$$

und die trigonometrischen Beziehungen (Sinus, Kosinus, Tangens):

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \quad (\text{Winkel } \alpha)$$

$$\sin \beta = \frac{b}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \cos \beta = \frac{a}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \tan \beta = \frac{b}{a} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \quad (\text{Winkel } \beta)$$

$$\sin \alpha = \cos \beta, \quad \cos \alpha = \sin \beta, \quad \tan \alpha = \frac{1}{\tan \beta}, \quad \tan \beta = \frac{1}{\tan \alpha}.$$

Mit den Dreieckswinkeln α, β und $\gamma = 90^\circ$ gelten noch die Beziehungen:

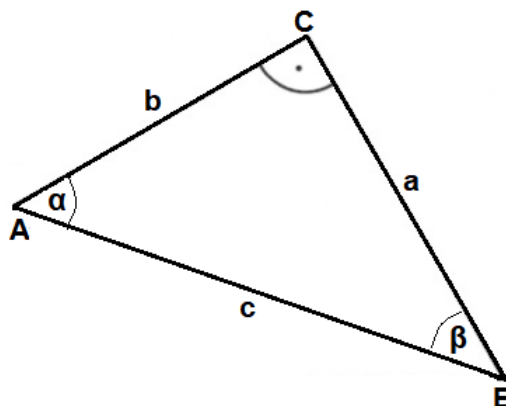
$$\alpha + \beta = 90^\circ, \quad \alpha = 90^\circ - \beta, \quad \beta = 90^\circ - \alpha.$$

Mit den Seiten a, b, c des Dreiecks errechnet sich dessen Umfang:

$$u = a + b + c.$$

Mit den Katheten a, b ermittelt sich der Flächeninhalt der Dreiecksfläche:

$$A = \frac{1}{2} ab.$$



II. Der Winkel α errechnet sich aus dem Winkel $\beta = 40,5^\circ$ (und letztlich auf Grund der Winkelsumme von 180° im Dreieck bei rechtem Winkel $\gamma = 90^\circ$) als:

$$\alpha = 90^\circ - \beta = 90^\circ - 40,5^\circ = 49,5^\circ.$$

Wir berechnen die Seite b mit Hilfe des Sinus (als Gegenkathete geteilt durch Hypotenuse) und des Winkels $\beta = 40,5^\circ$ sowie der Hypotenuse $c = 8$ cm und erhalten:

$$\sin \beta = \frac{b}{c} \Rightarrow \sin 40,5^\circ = \frac{b}{8} \Rightarrow b = 8 \cdot \sin 40,5^\circ = 5,2 \text{ cm.}$$

Mit dem Satz des Pythagoras lässt sich die Länge der noch fehlenden Kathete a ermitteln. Es gilt:

$$a^2 = c^2 - b^2 = 8^2 - 5,2^2 = 36,96 \Rightarrow a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{36,96} = 6,08 \approx 6,1 \text{ cm.}$$

III. Für den Umfang des Dreiecks $\triangle ABC$ gilt:

$$u = a + b + c = 6,1 + 5,2 + 8 = 19,3 \text{ cm.}$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle ABC$ errechnet sich mit den Katheten $a = 6,1$ cm, $b = 5,2$ cm als:

$$A = \frac{1}{2} \cdot 6,1 \cdot 5,2 = 15,86 \text{ cm}^2.$$

IV. Zeichnung:

