

Mathematikaufgaben

> Geometrie/Trigonometrie

> Rechtwinkliges Dreieck

Aufgabe: Im rechtwinkligen Dreieck $\triangle ABC$ ist der Winkel $\beta = 38,7^\circ$ und die Hypotenuse $c = 8,8$ cm ($\gamma = 90^\circ$). Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks.

Lösung: I. In einem rechtwinkligen Dreieck $\triangle ABC$ mit den Seiten a, b, c und den Winkeln α, β, γ bei $\gamma = 90^\circ$ heißen a und b Katheten, c Hypotenuse. Die Kathete, die gegenüber einem Winkel α oder β liegt, heißt Gegenkathete (bei Winkel α Seite a , bei Winkel β Seite b), die Kathete, die an einem Winkel α oder β liegt, heißt Ankathete (bei Winkel α Seite b , bei Winkel β Seite a). Dann gelten der Satz des Pythagoras:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ (Hypotenuse)}$$

$$a^2 = c^2 - b^2 \Rightarrow a = \sqrt{c^2 - b^2} \text{ (Kathete)}$$

$$b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2} \text{ (Kathete)}$$

und die trigonometrischen Beziehungen (Sinus, Kosinus, Tangens):

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \text{ (Winkel } \alpha \text{)}$$

$$\sin \beta = \frac{b}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \cos \beta = \frac{a}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \tan \beta = \frac{b}{a} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \text{ (Winkel } \beta \text{)}$$

$$\sin \alpha = \cos \beta, \quad \cos \alpha = \sin \beta, \quad \tan \alpha = \frac{1}{\tan \beta}, \quad \tan \beta = \frac{1}{\tan \alpha}.$$

Mit den Dreieckswinkeln α, β und $\gamma = 90^\circ$ gelten noch die Beziehungen:

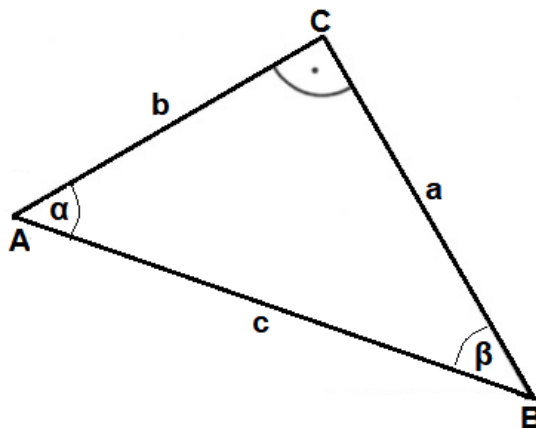
$$\alpha + \beta = 90^\circ, \quad \alpha = 90^\circ - \beta, \quad \beta = 90^\circ - \alpha.$$

Mit den Seiten a, b, c des Dreiecks errechnet sich dessen Umfang:

$$u = a + b + c.$$

Mit den Katheten a, b ermittelt sich der Flächeninhalt der Dreiecksfläche:

$$A = \frac{1}{2} ab.$$



II. Gemäß der Formel für den Flächeninhalt des Dreiecks:

$$A = \frac{1}{2} ab$$

sind im Folgenden die Katheten a und b zu bestimmen.

III. Wir beginnen mit der Seite b und verwenden die Hypotenuse $c = 8,8$ cm und den Winkel $\beta = 38,7^\circ$, um die Gegenkathete b zu bestimmen:

$$\sin \beta = \frac{b}{c} \Rightarrow \sin 38,7^\circ = \frac{b}{8,8} \Rightarrow b = 8,8 \cdot \sin 38,7^\circ = 5,5 \text{ cm.}$$

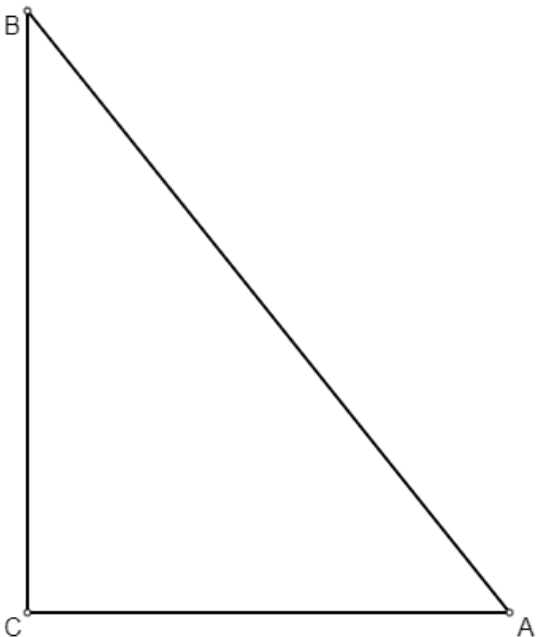
IV. Entweder mit dem Satz des Pythagoras oder mit Hilfe des Kosinus lässt sich die Kathete a berechnen. Wir entscheiden uns für die Anwendung des Kosinus und haben:

$$\cos \beta = \frac{a}{c} \Rightarrow \cos 38,7^\circ = \frac{a}{8,8} \Rightarrow a = 8,8 \cdot \cos 38,7^\circ = 6,87 \text{ cm.}$$

V. Gemäß II. errechnet sich der Flächeninhalt des Dreiecks als:

$$A = \frac{1}{2} ab = \frac{1}{2} \cdot 6,87 \cdot 5,5 = 18,89 \approx 18,9 \text{ cm}^2.$$

VI. Zeichnung:



www.michael-buhlmann.de / 09.2021 / Aufgabe 1473