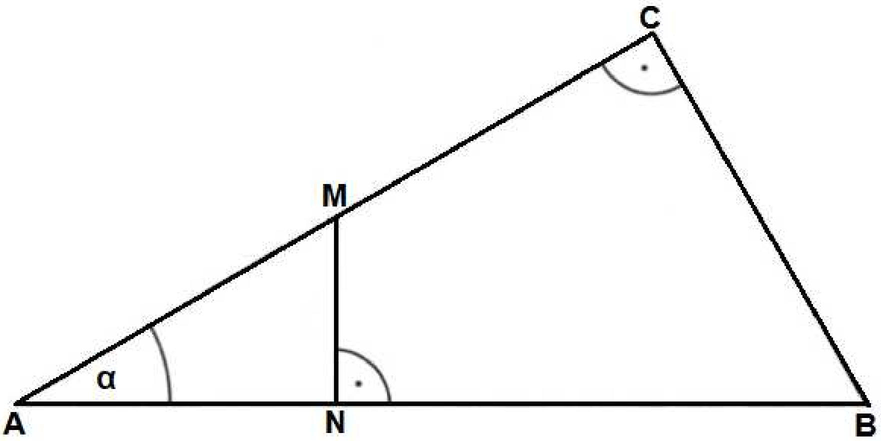
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Geometrie/Trigonometrie
> Drei-/Viereck

Aufgabe: Im rechtwinkligen Dreieck ABC ist M die Mitte der Seite zwischen A und C. Weiter gilt: α = 28,4°, $\overline{MN}$ = 4 cm.



Berechne Umfang und Flächeninhalt des Vierecks BCMN.

Lösung: I. In einem <u>rechtwinkligen Dreieck</u> ABC mit den Seiten a, b, c und den Winkeln α, β, γ bei γ = 90° heißen a und b Katheten, c Hypotenuse. Die Kathete, die gegenüber einem Winkel α oder β liegt, heißt Gegenkathete (bei Winkel α Seite a, bei Winkel β Seite b), die Kathete, die an einem Winkel α oder β liegt, heißt Ankathete (bei Winkel α Seite b, bei Winkel β Seite a). Dann gelten der Satz des Pythagoras:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ (Hypotenuse)}$$
$$a^2 = c^2 - b^2 \Rightarrow a = \sqrt{c^2 - b^2} \text{ (Kathete)}$$
$$b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow c = \sqrt{c^2 - a^2} \text{ (Kathete)}$$

und die trigonometrischen Beziehungen (Sinus, Kosinus, Tangens):

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse},\ \cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{Ankathete}{Hypotenuse},\ \tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} \text{ (Winkel α)}$$
$$\sin\beta = \frac{b}{c} = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse},\ \cos\beta = \frac{a}{c} = \frac{Ankathete}{Hypotenuse},\ \tan\beta = \frac{b}{a} = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} \text{ (Winkel β)}$$
$$\sin\alpha = \cos\beta,\ \cos\alpha = \sin\beta,\ \tan\alpha = \frac{1}{\tan\beta},\ \tan\beta = \frac{1}{\tan\alpha}.$$

Mit den Dreieckswinkeln α, β und γ = 90° gelten noch die Beziehungen:

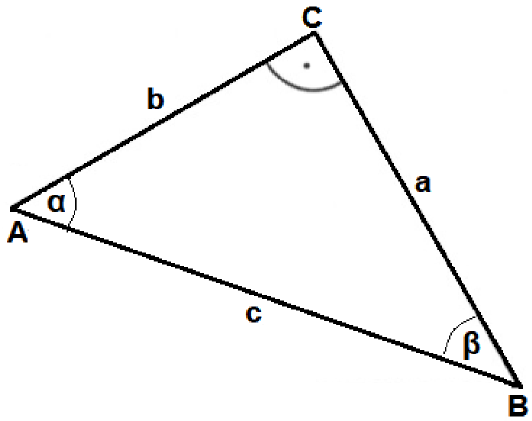
$$\alpha + \beta = 90°,\ \alpha = 90° - \beta,\ \beta = 90° - \alpha.$$

Mit den Seiten a, b, c des Dreiecks errechnet sich dessen Umfang:

$$u = a + b + c.$$

Mit den Katheten a, b ermittelt sich der Flächeninhalt der Dreiecksfläche:

$$A = \frac{1}{2}ab.$$



II. Im Dreieck AMN sind mit α = 28,4°, $\overline{MN}$ = 4 cm ein Winkel und die dazugehörige Gegenkathete gegeben. Wir berechnen die Hypotenuse $\overline{AM}$ daher mit Hilfe des Sinus:

$\sin\alpha = \frac{\overline{MN}}{\overline{AM}}$ => $\sin 28{,}4° = \frac{4}{\overline{AM}}$ => $\overline{AM} = \frac{4}{\sin 28{,}4°}$ = 8,41 cm.

Die Kathete $\overline{AN}$ im Dreieck AMN ermittelt sich mit dem Satz des Pythagoras und damit als:

$\overline{AN}^2 = \overline{AM}^2 - \overline{MN}^2$ => $\overline{AN}^2$ = $8{,}41^2 – 4^2$ = 54,73 => $\overline{AN}$ = 7,4 cm.

Die Strecke $\overline{AN}$ wird später bei der Berechnung von Umfang und Flächeninhalt des Vierecks BCMN benötigt.

III. Im Dreieck ABC kennen wir die Seite $\overline{AC}$, die wegen M als Mitte dieser Seite doppelt so lang ist wie die Seite $\overline{AM}$. Es gilt also:

$\overline{AC}$ = 2·$\overline{AM}$ => $\overline{AC}$ = 2·8,41 = 16,82 cm.

Damit sind im Dreieck ABC ein Winkel und die dazugehörige Ankathete bekannt. Wir berechnen zunächst die Gegenkathete $\overline{BC}$ und verwenden dazu den Tangens:

$\tan\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$ => $\tan 28{,}4° = \frac{\overline{BC}}{16{,}82}$ => $\overline{BC} = 16{,}82 \cdot \tan 28{,}4°$ = 9,09 cm.

Die Hypotenuse $\overline{AB}$ im Dreieck ABC errechnen wir mit dem Satz des Pythagoras:

$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$ => $\overline{AB}^2$ = $16{,}82^2 + 9{,}09^2$ = 365,54 => $\overline{AN}$ = 19,12 cm.

IV. Der Umfang des Vierecks BCMN ist dann:

u = $\overline{BC} + \overline{CM} + \overline{MN} + \overline{BN}$ (als Summe der Vierecksseiten)

mit: $\overline{BC}$ = 9,09 cm, $\overline{CM} = \overline{AM}$ = 8,41 cm (wegen M als Mitte der Seite $\overline{AC}$), $\overline{MN}$ = 4 cm, $\overline{BN} = \overline{AB} - \overline{AN}$ = 19,12–7,4 = 11,72 cm. Es gilt damit:

u = 9,09+8,41+4+11,72 = 33,22 ≈ 33,2 cm.

V. Der Flächeninhalt des Vierecks BCMN ermittelt sich als Differenz der Flächeninhalte der recht-winkligen Dreiecke ABC und AMN, also:

A = $\frac{\overline{AC} \cdot \overline{BC}}{2} - \frac{\overline{AN} \cdot \overline{MN}}{2}$ (Flächenberechnung jeweils über die Katheten der Dreiecke).

Damit gilt:

A = $\frac{16{,}82 \cdot 9{,}09}{2} - \frac{7{,}4 \cdot 4}{2}$ = 76,45–14,8 = 61,65 ≈ 61,7 cm².

www.michael-buhlmann.de / 01.2018 / Aufgabe 548