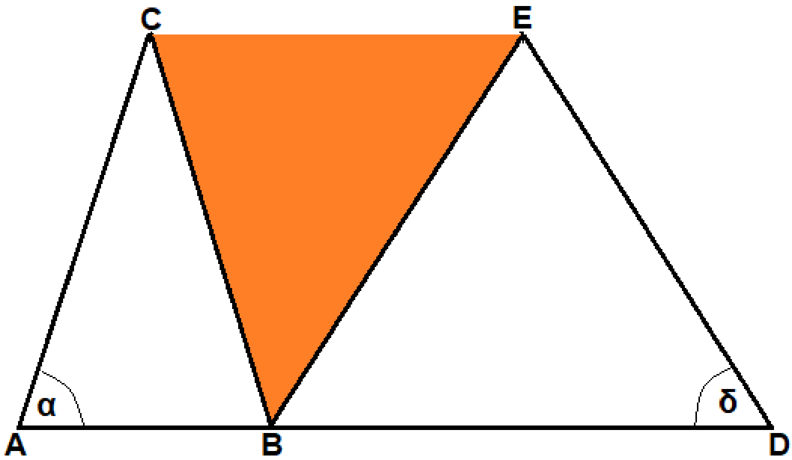
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Geometrie/Trigonometrie
> Gleichschenklige Dreiecke

Aufgabe: Die gleichschenkligen Dreiecke ABC und BDE besitzen die gleiche Höhe. Weiter gilt: α = 74,2°, $\overline{BE}$ = 10,3 cm, δ = 56,7°.



Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks BCE.

Lösung: I. In einem rechtwinkligen Dreieck ABC mit den Seiten a, b, c und den Winkeln α, β, γ bei γ = 90° heißen a und b Katheten, c Hypotenuse. Die Kathete, die gegenüber einem Winkel α oder β liegt, heißt Gegenkathete (bei Winkel α Seite a, bei Winkel β Seite b), die Kathete, die an einem Winkel α oder β liegt, heißt Ankathete (bei Winkel α Seite b, bei Winkel β Seite a). Dann gelten der Satz des Pythagoras:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ (Hypotenuse)}$$
$$a^2 = c^2 - b^2 \Rightarrow a = \sqrt{c^2 - b^2} \text{ (Kathete)}$$
$$b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow c = \sqrt{c^2 - a^2} \text{ (Kathete)}$$

und die trigonometrischen Beziehungen (Sinus, Kosinus, Tangens):

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse},\ \cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{Ankathete}{Hypotenuse},\ \tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} \text{ (Winkel α)}$$
$$\sin\beta = \frac{b}{c} = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse},\ \cos\beta = \frac{a}{c} = \frac{Ankathete}{Hypotenuse},\ \tan\beta = \frac{b}{a} = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} \text{ (Winkel β)}$$
$$\sin\alpha = \cos\beta,\ \cos\alpha = \sin\beta,\ \tan\alpha = \frac{1}{\tan\beta},\ \tan\beta = \frac{1}{\tan\alpha}.$$

Mit den Dreieckswinkeln α, β und γ = 90° gelten noch die Beziehungen:

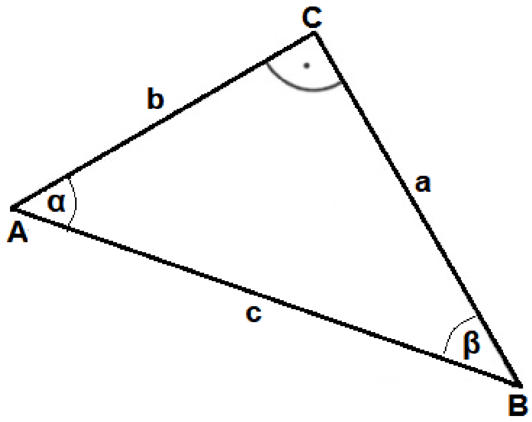
α + β = 90°, α = 90° – β, β = 90° – α.

Mit den Seiten a, b, c des Dreiecks errechnet sich dessen Umfang:

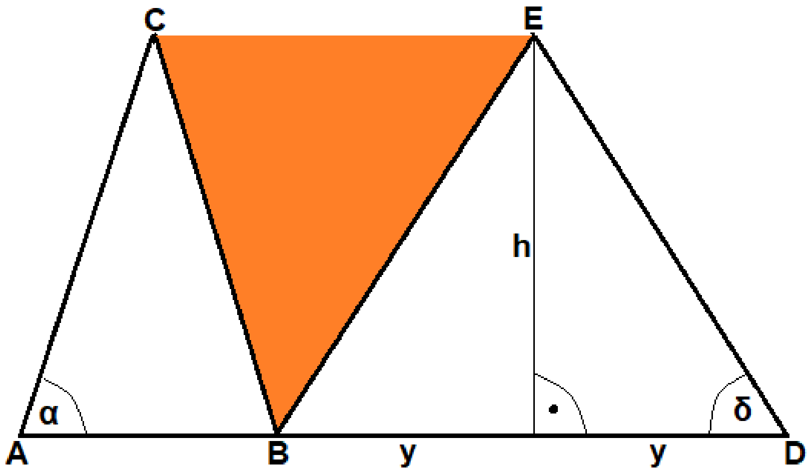
u = a + b + c.

Mit den Katheten a, b ermittelt sich der Flächeninhalt der Dreiecksfläche:

$$A = \frac{1}{2}ab.$$



II. Im gleichschenkligen Dreieck BDE gilt: δ = 56,7°, $\overline{BE} = \overline{DE}$ = 10,3 cm. Wir halbieren das Dreieck durch die Höhe h und erhalten ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten h und y sowie der Hypotenuse $\overline{DE}$.



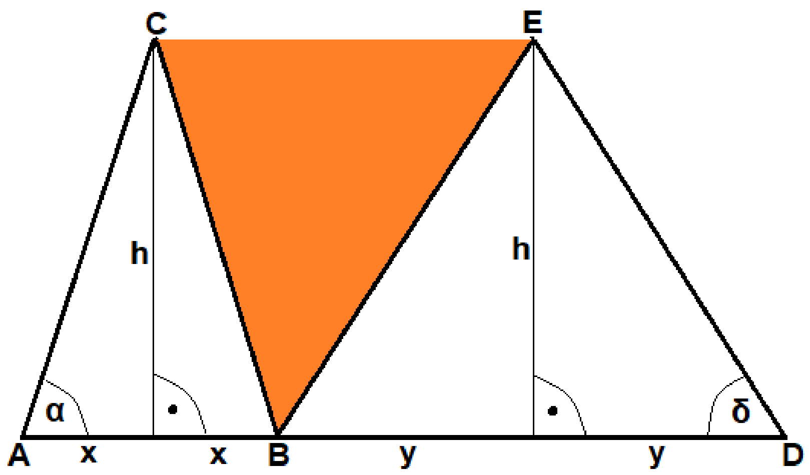
Die Höhe h berechnen wir mit dem Winkel δ = 56,7° und dem Sinus und erhalten:

$\sin\delta = \frac{h}{\overline{DE}}$ => $\sin 56{,}7° = \frac{h}{10{,}3}$ => $h = 10{,}3 \cdot \sin 56{,}7°$ = 8,61 cm.

Die Kathete y ermittelt sich mit dem Satz des Pythagoras und damit als:

$y^2 = \overline{DE}^2 - h^2$ => $y^2 = 10{,}3^2 – 8{,}61^2 = 31{,}96$ => y = 5,65 cm.

III. Im gleichschenkligen Dreieck ABC kennen wir die Höhe h, die nach Voraussetzung Höhe beider gleichschenkliger Dreiecke ist. Wir halbieren das Dreieck ABC durch die Höhe h und erhalten ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten h und x (und der Hypotenuse $\overline{AC}$) und dem Winkel α.

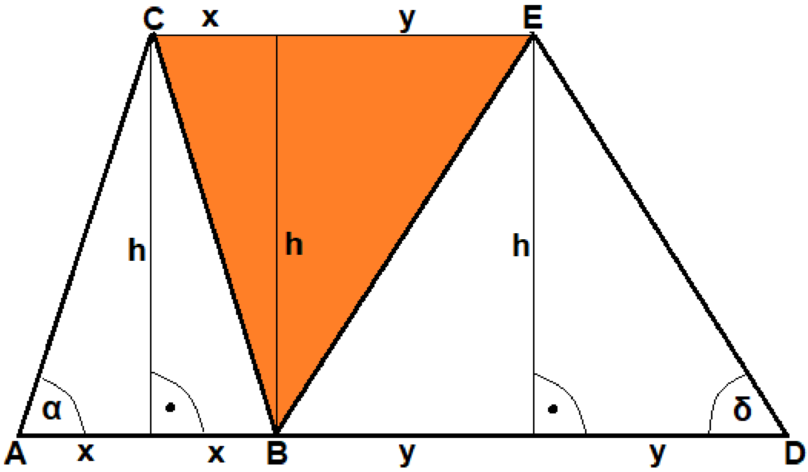


Wir bestimmen mit Hilfe des Winkels α = 74,2° und mit dem Tangens:

$\tan\alpha = \frac{h}{x}$ => $\tan 74{,}2° = \frac{8{,}61}{x}$ => $x = \frac{8{,}61}{\tan 74{,}2°}$ = 2,44 cm.

IV. Im Dreieck BCE ermitteln wir als Grundseite:

g = $\overline{CE}$ = x + y = 2,44+5,65 = 8,09 cm.



Die Höhe des Dreiecks BCE ist die Höhe der gleichschenkligen Dreiecke:
h = 8,61 cm.

Gemäß der Flächenformel $A = \frac{1}{2}gh$ für beliebige Dreiecke gilt für den Flächeninhalt des Dreiecks BCE:

A = $\frac{1}{2} \cdot 8{,}09 \cdot 8{,}61$ = 34,83 ≈ 34,8 cm^2,

womit die gesuchte Größe berechnet wurde.

www.michael-buhlmann.de / 01.2018 / Aufgabe 549