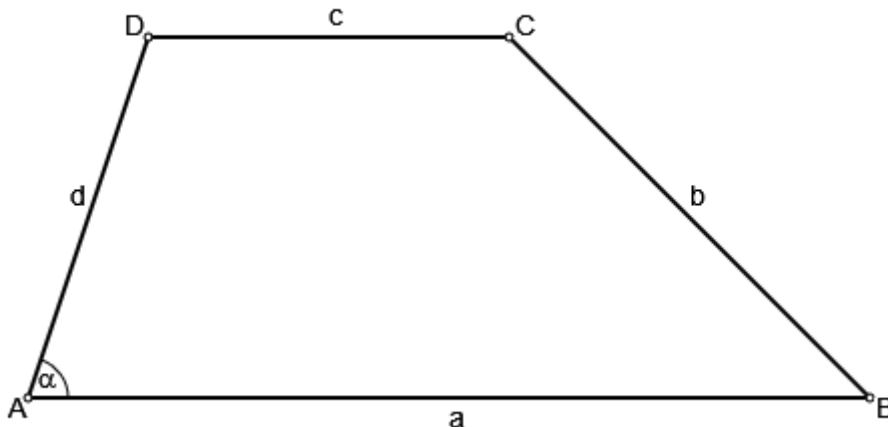


Mathematikaufgaben

> Geometrie/Trigonometrie

> Trapez

Aufgabe: Gegeben sei ein Trapez ABCD mit den Seitenlängen $a = 7 \text{ cm}$, $c = 3 \text{ cm}$, $d = 3,2 \text{ cm}$ und dem Winkel $\alpha = 71,8^\circ$. Berechne den Umfang und den Flächeninhalt des Trapezes.



Lösung: I. In einem rechtwinkligen Dreieck $\triangle ABC$ mit den Seiten a , b , c und den Winkeln α , β , γ bei $\gamma = 90^\circ$ heißen a und b Katheten, c Hypotenuse. Die Kathete, die gegenüber einem Winkel α oder β liegt, heißt Gegenkathete (bei Winkel α Seite a , bei Winkel β Seite b), die Kathete, die an einem Winkel α oder β liegt, heißt Ankathete (bei Winkel α Seite b , bei Winkel β Seite a). Dann gelten der Satz des Pythagoras:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ (Hypotenuse)}$$

$$a^2 = c^2 - b^2 \Rightarrow a = \sqrt{c^2 - b^2} \text{ (Kathete)}$$

$$b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2} \text{ (Kathete)}$$

und die trigonometrischen Beziehungen (Sinus, Kosinus, Tangens):

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \text{ (Winkel } \alpha \text{)}$$

$$\sin \beta = \frac{b}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \cos \beta = \frac{a}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \tan \beta = \frac{b}{a} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \text{ (Winkel } \beta \text{)}$$

$$\sin \alpha = \cos \beta, \quad \cos \alpha = \sin \beta, \quad \tan \alpha = \frac{1}{\tan \beta}, \quad \tan \beta = \frac{1}{\tan \alpha}.$$

Mit den Dreieckswinkeln α , β und $\gamma = 90^\circ$ gelten noch die Beziehungen:

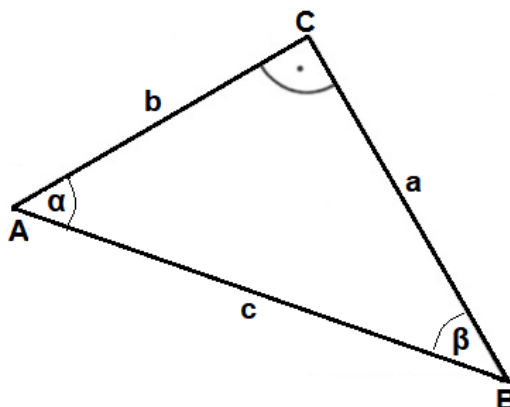
$$\alpha + \beta = 90^\circ, \quad \alpha = 90^\circ - \beta, \quad \beta = 90^\circ - \alpha.$$

Mit den Seiten a , b , c des Dreiecks errechnet sich dessen Umfang:

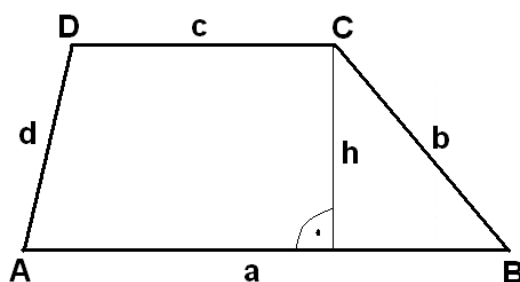
$$u = a + b + c.$$

Mit den Katheten a , b ermittelt sich der Flächeninhalt der Dreiecksfläche:

$$A = \frac{1}{2} ab.$$



II. Ein Trapez ABCD ist ein Viereck mit zwei parallelen Seiten. Die parallelen Seiten sind a und c, die Trapezhöhe h steht senkrecht auf den parallelen Seiten.

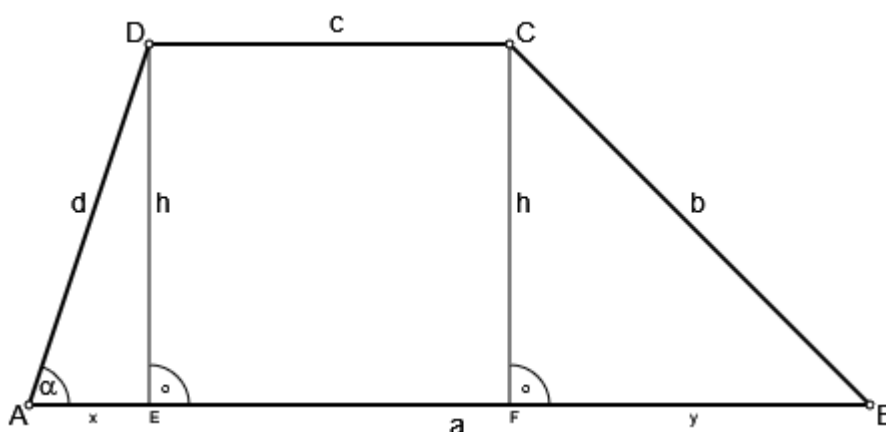


Hinsichtlich Umfang und Flächeninhalt des Trapezes gilt:

$$\text{Umfang: } u = a + b + c + d$$

$$\text{Fläche: } A = \frac{a + c}{2} \cdot h = \frac{1}{2}(a + c) \cdot h.$$

III. Hinsichtlich der Aufgabenstellung führt das Einzeichnen der Trapezhöhe h in das Trapez ABCD auf zwei rechtwinklige Dreiecke $\triangle ADE$ und $\triangle BCF$ innerhalb des Trapezes:



IV. Das linke rechtwinklige Dreieck $\triangle ADE$ innerhalb des Trapezes ABCD enthält die Hypotenuse $d = 3,2$ cm und den Winkel $\alpha = 71,8^\circ$. Die Trapezhöhe h ist die Gegenkathete zum Winkel α in diesem Dreieck, so dass Anwendung des Sinus als Länge der Gegenkathete geteilt durch die Länge der Hypotenuse ergibt:

$$\sin \alpha = \frac{h}{d} \Rightarrow \sin 71,8^\circ = \frac{h}{3,2} \Rightarrow 3,2 \cdot \sin 71,8^\circ = h \Rightarrow h = 3,04 \approx 3 \text{ cm.}$$

Mit dem Satz des Pythagoras lässt sich die Länge der noch fehlenden Kathete x im Dreieck $\triangle ADE$ ermitteln. Es gilt:

$$x^2 = d^2 - h^2 = 3,2^2 - 3^2 = 1,24 \Rightarrow x = \sqrt{d^2 - h^2} = \sqrt{1,24} = 1,11 \approx 1,1 \text{ cm.}$$

Mit der Strecke x hat es dabei folgende Bewandtnis: Die Länge der Strecke x wird benötigt, um die Kathete y im rechten rechtwinkligen Dreieck $\triangle BCF$ zu errechnen. Es gilt dabei:

$$x + c + y = a \Rightarrow y = a - x - c = 7 - 1,1 - 3 = 2,9 \text{ cm.}$$

V. Das rechte rechtwinklige Dreieck $\triangle BCF$ innerhalb des Trapezes ABCD enthält damit die zwei Seiten $h = 3 \text{ cm}$ und $y = 2,9 \text{ cm}$ als Katheten. Mit dem Satz des Pythagoras lässt sich die Länge der Hypotenuse b im Dreieck $\triangle BCF$ berechnen:

$$b^2 = h^2 + y^2 = 3^2 + 2,9^2 = 17,41 \Rightarrow b = \sqrt{h^2 + y^2} = \sqrt{17,41} = 4,17 \approx 4,2 \text{ cm.}$$

VI. Damit sind alle notwendige Größen im Trapez ABCD bekannt. Für den Umfang des Trapezes gilt:

$$u = a + b + c + d = 7 + 4,2 + 3 + 3,2 = 17,4 \text{ cm.}$$

Der Flächeninhalt des Trapezes ABCD errechnet sich mit den Parallelen $a = 7 \text{ cm}$, $c = 3 \text{ cm}$ sowie die Trapezhöhe $h = 3 \text{ cm}$ als:

$$A = \frac{1}{2}(7 + 3) \cdot 3 = 15 \text{ cm}^2.$$