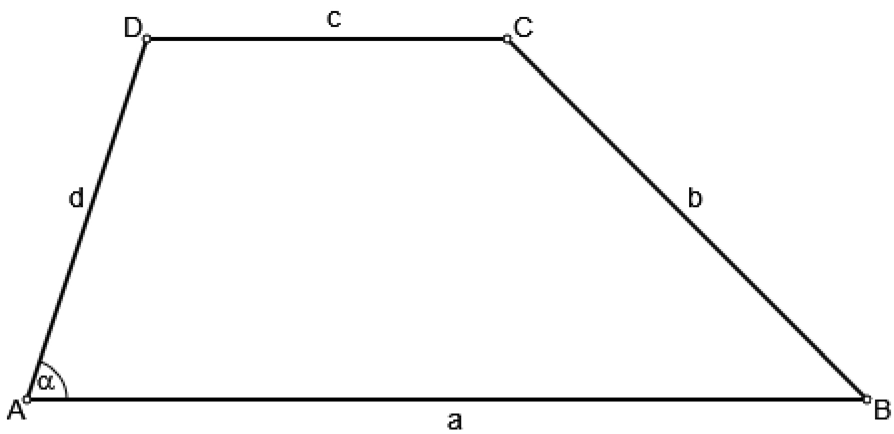
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Geometrie/Trigonometrie
> Trapez

Aufgabe: Gegeben sei ein Trapez ABCD mit den Seitenlängen a = 7 cm, c = 3 cm, d = 3,2 cm und dem Winkel α = 71,8°. Berechne den Umfang und den Flächeninhalt des Trapezes.



Lösung: I. In einem <u>rechtwinkligen Dreieck</u> ΔABC mit den Seiten a, b, c und den Winkeln α, β, γ bei γ = 90° heißen a und b Katheten, c Hypotenuse. Die Kathete, die gegenüber einem Winkel α oder β liegt, heißt Gegenkathete (bei Winkel α Seite a, bei Winkel β Seite b), die Kathete, die an einem Winkel α oder β liegt, heißt Ankathete (bei Winkel α Seite b, bei Winkel β Seite a). Dann gelten der Satz des Pythagoras:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ (Hypotenuse)}$$
$$a^2 = c^2 - b^2 \Rightarrow a = \sqrt{c^2 - b^2} \text{ (Kathete)}$$
$$b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2} \text{ (Kathete)}$$

und die trigonometrischen Beziehungen (Sinus, Kosinus, Tangens):

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse},\ \cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{Ankathete}{Hypotenuse},\ \tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} \text{ (Winkel α)}$$
$$\sin\beta = \frac{b}{c} = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse},\ \cos\beta = \frac{a}{c} = \frac{Ankathete}{Hypotenuse},\ \tan\beta = \frac{b}{a} = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} \text{ (Winkel β)}$$
$$\sin\alpha = \cos\beta,\ \cos\alpha = \sin\beta,\ \tan\alpha = \frac{1}{\tan\beta},\ \tan\beta = \frac{1}{\tan\alpha}.$$

Mit den Dreieckswinkeln α, β und γ = 90° gelten noch die Beziehungen:

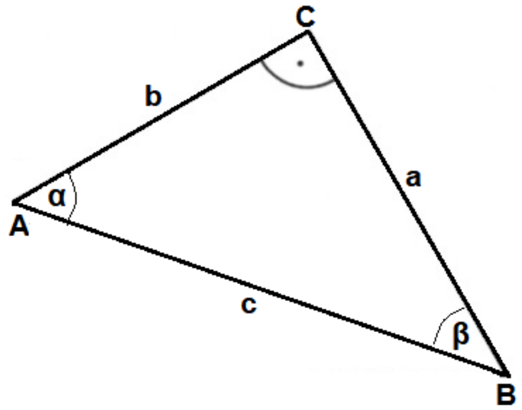
α + β = 90°, α = 90° – β, β = 90° – α.

Mit den Seiten a, b, c des Dreiecks errechnet sich dessen Umfang:

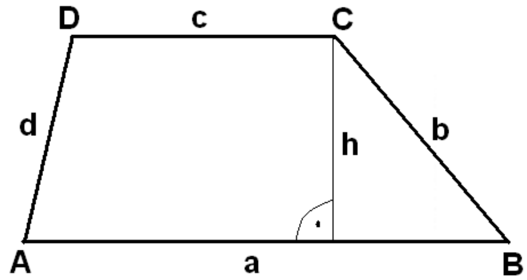
u = a + b + c.

Mit den Katheten a, b ermittelt sich der Flächeninhalt der Dreiecksfläche:

$$A = \frac{1}{2}ab.$$



II. Ein <u>Trapez</u> ABCD ist ein Viereck mit zwei parallelen Seiten. Die parallelen Seiten sind a und c, die Trapezhöhe h steht senkrecht auf den parallelen Seiten.

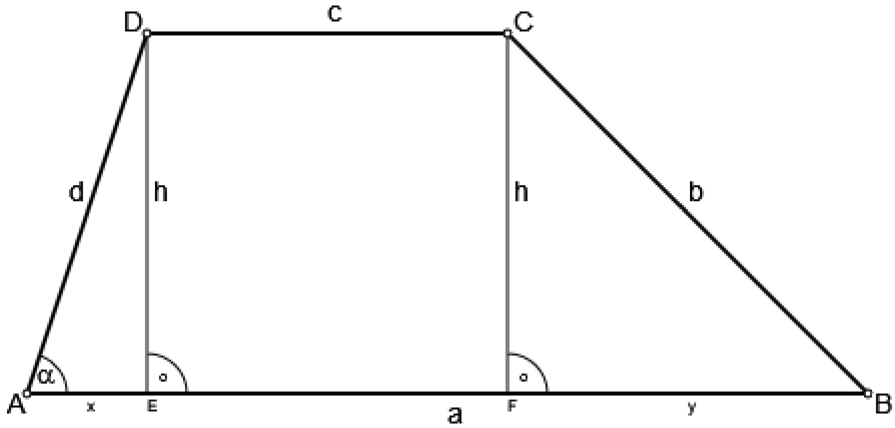


Hinsichtlich Umfang und Flächeninhalt des Trapezes gilt:

Umfang: u = a + b + c + d

Fläche: $A = \frac{a+c}{2} \cdot h = \frac{1}{2}(a+c) \cdot h$.

III. Hinsichtlich der Aufgabenstellung führt das Einzeichnen der <u>Trapezhöhe</u> h in das Trapez ABCD auf zwei rechtwinklige Dreiecke ΔADE und ΔBCF innerhalb des Trapezes:



IV. Das <u>linke</u> rechtwinklige <u>Dreieck</u> ΔADE innerhalb des Trapezes ABCD enthält die Hypotenuse d = 3,2 cm und den Winkel α = 71,8°. Die Trapezhöhe h ist die Gegenkathete zum Winkel α in diesem Dreieck, so dass Anwendung des Sinus als Länge der Gegenkathete geteilt durch die Länge der Hypotenuse ergibt:

$$\sin\alpha = \frac{h}{d} \Rightarrow \sin 71{,}8° = \frac{h}{3{,}2} \Rightarrow 3{,}2 \cdot \sin 71{,}8° = h \Rightarrow h = 3{,}04 \approx 3 \text{ cm.}$$

Mit dem Satz des Pythagoras lässt sich die Länge der noch fehlenden Kathete x im Dreieck ΔADE ermitteln. Es gilt:

$x^2 = d^2 - h^2 = 3{,}2^2 - 3^2 = 1{,}24 \Rightarrow x = \sqrt{d^2 - h^2} = \sqrt{1{,}24} = 1{,}11 \approx 1{,}1$ cm.

Mit der Strecke x hat es dabei folgende Bewandtnis: Die Länge der Strecke x wird benötigt, um die Kathete y im rechten rechtwinkligen Dreieck ΔBCF zu errechnen. Es gilt dabei:

x + c +y = a => y = a – x – c = 7 – 1,1 – 3 = 2,9 cm.

V. Das rechte rechtwinklige Dreieck ΔBCF innerhalb des Trapezes ABCD enthält damit die zwei Seiten h = 3 cm und y = 2,9 cm als Katheten. Mit dem Satz des Pythagoras lässt sich die Länge der Hypotenuse b im Dreieck ΔBCF berechnen:

$b^2 = h^2 + y^2 = 3^2 + 2{,}9^2 = 17{,}41 \Rightarrow b = \sqrt{h^2 + y^2} = \sqrt{17{,}41} = 4{,}17 \approx 4{,}2$ cm.

VI. Damit sind alle notwendige Größen im Trapez ABCD bekannt. Für den Umfang des Trapezes gilt:

u = a + b + c + d = 7 + 4,2 + 3 + 3,2 = 17,4 cm.

Der Flächeninhalt des Trapezes ABCD errechnet sich mit den Parallelen a = 7 cm, c = 3 cm sowie die Trapezhöhe h = 3 cm als:

$A = \frac{1}{2}(7+3) \cdot 3 = 15$ cm^2.

www.michael-buhlmann.de / 06.2018 / Aufgabe 582