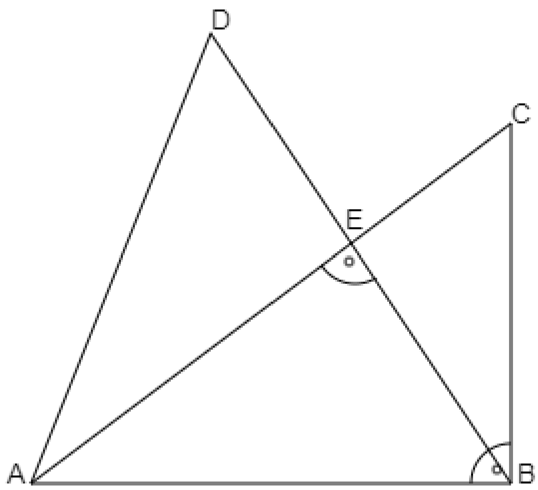
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Geometrie/Trigonometrie
> Abstand Punkt – Seite

Aufgabe: Gegeben sind in der Figur ABCDE die Streckenlängen $\overline{AB}$ = 8 cm, $\overline{BC}$ = 6 cm, $\overline{DE}$ = 4,2 cm. Berechne den Abstand des Punktes D zur Seite $\overline{AB}$.



Lösung: I. In einem rechtwinkligen Dreieck ΔABC mit den Seiten a, b, c und den Winkeln α, β, γ bei γ = 90° heißen a und b Katheten, c Hypotenuse. Die Kathete, die gegenüber einem Winkel α oder β liegt, heißt Gegenkathete (bei Winkel α Seite a, bei Winkel β Seite b), die Kathete, die an einem Winkel α oder β liegt, heißt Ankathete (bei Winkel α Seite b, bei Winkel β Seite a). Dann gelten der Satz des Pythagoras:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ (Hypotenuse)}$$
$$a^2 = c^2 - b^2 \Rightarrow a = \sqrt{c^2 - b^2} \text{ (Kathete)}$$
$$b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow c = \sqrt{c^2 - a^2} \text{ (Kathete)}$$

und die trigonometrischen Beziehungen (Sinus, Kosinus, Tangens):

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse},\ \cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{Ankathete}{Hypotenuse},\ \tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} \text{ (Winkel α)}$$
$$\sin\beta = \frac{b}{c} = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse},\ \cos\beta = \frac{a}{c} = \frac{Ankathete}{Hypotenuse},\ \tan\beta = \frac{b}{a} = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} \text{ (Winkel β)}$$
$$\sin\alpha = \cos\beta,\ \cos\alpha = \sin\beta,\ \tan\alpha = \frac{1}{\tan\beta},\ \tan\beta = \frac{1}{\tan\alpha}.$$

Mit den Dreieckswinkeln α, β und γ = 90° gelten noch die Beziehungen:

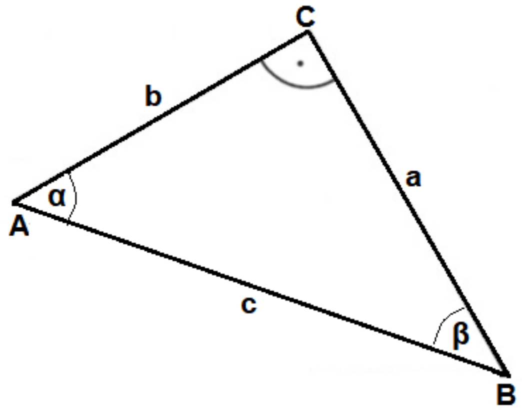
α + β = 90°, α = 90° – β, β = 90° – α.

Mit den Seiten a, b, c des Dreiecks errechnet sich dessen Umfang:

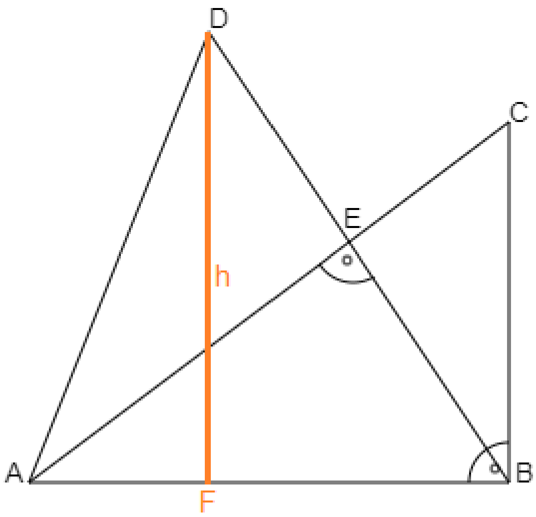
u = a + b + c.

Mit den Katheten a, b ermittelt sich der Flächeninhalt der Dreiecksfläche:

$$A = \frac{1}{2}ab.$$



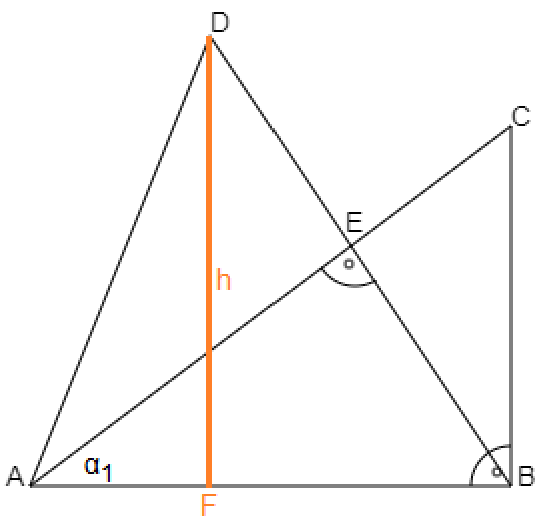
II. Hinsichtlich der Aufgabenstellung führt das Einzeichnen der Höhe h in die Figur ABCDE zu:



Der Fußpunkt der Höhe heiße F, die Höhe steht senkrecht auf der Seite $\overline{AB}$. Die Höhe h als gesuchter Abstand ist im Folgenden zu berechnen.

III. Im rechtwinkligen Dreieck ΔABC innerhalb der Figur ABCDE lässt sich der Winkel α_1 berechnen aus Gegenkathete $\overline{BC}$ und Ankathete $\overline{AB}$ vermöge des Tangens:

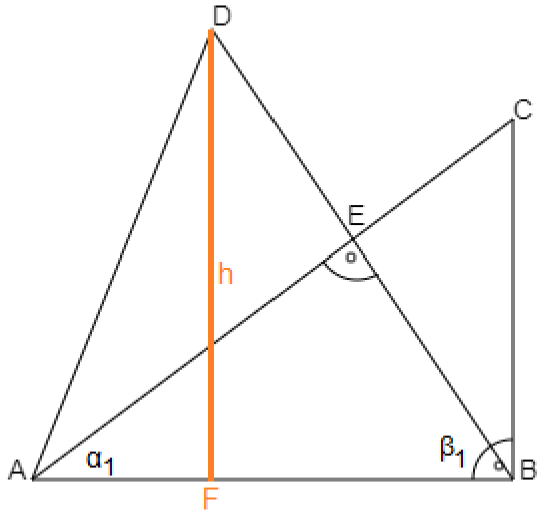
$$\tan\alpha_1 = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \Rightarrow \alpha_1 = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) = 36{,}87°.$$



IV. Im rechtwinkligen Dreieck ΔABE innerhalb der Figur ABCDE errechnet sich mit dem Winkel

α_1 = 36,87° und der Hypotenuse $\overline{AB}$ die Strecke $\overline{BE}$ vermöge des Sinus:

$$\sin \alpha_1 = \frac{\overline{BE}}{\overline{AB}} \Rightarrow \sin 36{,}87° = \frac{\overline{BE}}{8} \Rightarrow \overline{BE} = 8 \cdot \sin 36{,}87° = 4{,}8 \text{ cm.}$$



V. Im rechtwinkligen Dreieck ΔBDF innerhalb der Figur ABCDE ist die Seite $\overline{BD}$:

$\overline{BD} = \overline{BE} + \overline{DE}$ = 4,8 + 4,2 = 9 cm

groß. Für den Winkel β_1 gilt im rechtwinkligen Dreieck ABE:

β_1 = 90° – α_1 = 90° – 36,87° = 53,13°.

Im rechtwinkligen Dreieck ΔBDF lässt sich die Höhe h, also der gesuchte Abstand zwischen Punkt D und Seite $\overline{AB}$, mit Hilfe des Winkels β_1 und der Hypotenuse $\overline{BD}$ vermöge des Sinus wie folgt berechnen:

$$\sin \beta_1 = \frac{h}{\overline{BD}} \Rightarrow \sin 53{,}13° = \frac{h}{9} \Rightarrow h = 9 \cdot \sin 53{,}13° = 7{,}2 \text{ cm.}$$

Der Abstand zwischen Punkt D und Seite $\overline{AB}$ beträgt also: 7,2 cm.

www.michael-buhlmann.de / 02.2019 / Aufgabe 771