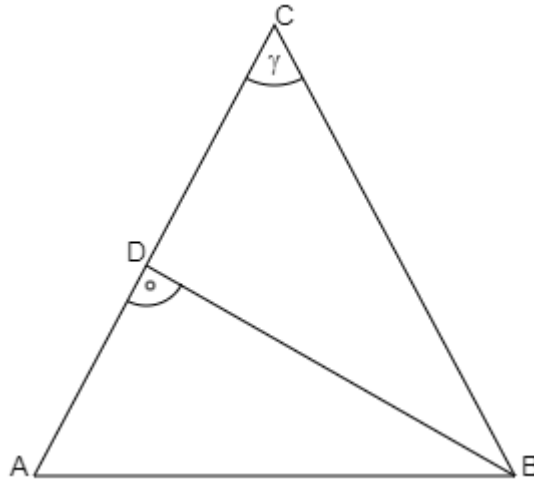


Mathematikaufgaben

> Geometrie/Trigonometrie

> Dreieckumfang, -flächeninhalt

Aufgabe: Im gleichschenkligen Dreieck ABC mit $\overline{AC} = \overline{BC} = 8,5$ cm und Winkel $\gamma = 56,1^\circ$ ist den Umfang und den Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks ABD zu berechnen.



Lösung: I. In einem rechtwinkligen Dreieck $\triangle ABC$ mit den Seiten a, b, c und den Winkeln α, β, γ bei $\gamma = 90^\circ$ heißen a und b Katheten, c Hypotenuse. Die Kathete, die gegenüber einem Winkel α oder β liegt, heißt Gegenkathete (bei Winkel α Seite a , bei Winkel β Seite b), die Kathete, die an einem Winkel α oder β liegt, heißt Ankathete (bei Winkel α Seite b , bei Winkel β Seite a). Dann gelten der Satz des Pythagoras:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ (Hypotenuse)}$$

$$a^2 = c^2 - b^2 \Rightarrow a = \sqrt{c^2 - b^2} \text{ (Kathete)}$$

$$b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2} \text{ (Kathete)}$$

und die trigonometrischen Beziehungen (Sinus, Kosinus, Tangens):

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \text{ (Winkel } \alpha \text{)}$$

$$\sin \beta = \frac{b}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \cos \beta = \frac{a}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \tan \beta = \frac{b}{a} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \text{ (Winkel } \beta \text{)}$$

$$\sin \alpha = \cos \beta, \quad \cos \alpha = \sin \beta, \quad \tan \alpha = \frac{1}{\tan \beta}, \quad \tan \beta = \frac{1}{\tan \alpha}.$$

Mit den Dreieckswinkeln α, β und $\gamma = 90^\circ$ gelten noch die Beziehungen:

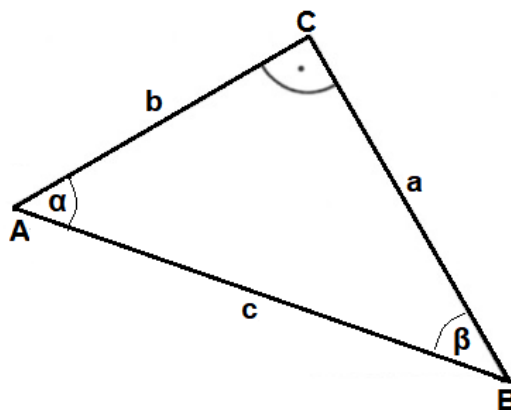
$$\alpha + \beta = 90^\circ, \quad \alpha = 90^\circ - \beta, \quad \beta = 90^\circ - \alpha.$$

Mit den Seiten a, b, c des Dreiecks errechnet sich dessen Umfang:

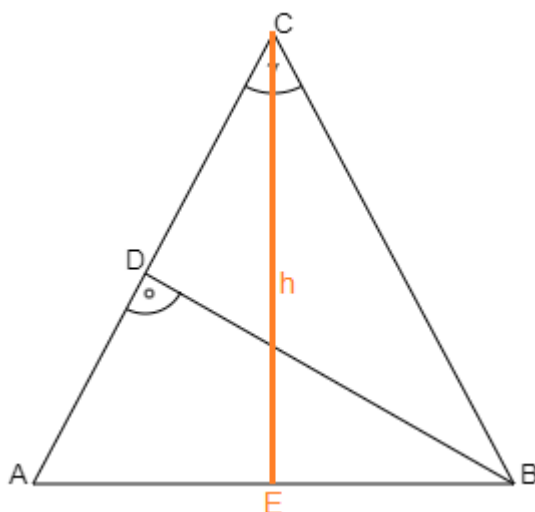
$$u = a + b + c.$$

Mit den Katheten a, b ermittelt sich der Flächeninhalt der Dreiecksfläche:

$$A = \frac{1}{2} ab.$$



II. Hinsichtlich der Aufgabenstellung führt das Einzeichnen der Höhe h im gleichschenkligen Dreieck ABC zu:



Der Fußpunkt der Höhe heiße E, die Höhe steht senkrecht auf der Seite \overline{AB} .

III. Im rechtwinkligen Dreieck $\triangle AEC$ innerhalb des gleichschenkligen Dreiecks ABC hat mit $\overline{AC} = 8,5$ cm und dem Winkel $\gamma/2 = 56,1^\circ = 28,05^\circ$ die Seite \overline{AC} den Wert vermöge des Sinus:

$$\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} \Rightarrow \sin 28,05^\circ = \frac{\overline{AE}}{8,5} \Rightarrow \overline{AE} = 8,5 \cdot \sin 28,05^\circ = 4 \text{ cm.}$$

Wegen der Gleichschenkligkeit des Dreiecks ABC gilt:

$$\overline{AB} = 2 \cdot \overline{AE} = 2 \cdot 4 = 8 \text{ cm.}$$

Außerdem errechnet sich der Winkel α als:

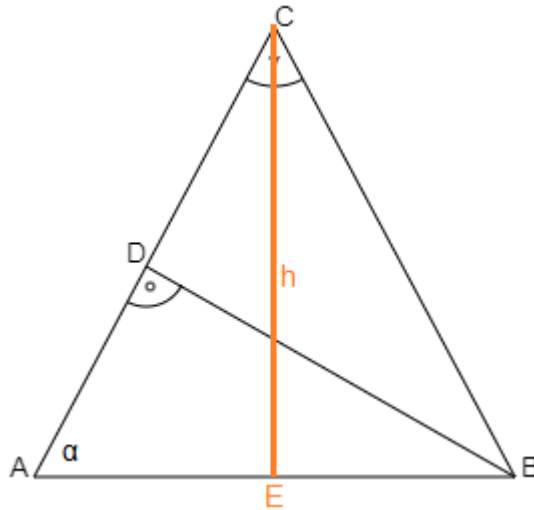
$$\alpha = 90^\circ - \gamma/2 = 90^\circ - 28,05^\circ = 61,95^\circ.$$

IV. Wir betrachten nun das Dreieck $\triangle ABD$ mit rechtem Winkel an der Ecke D. Da der Winkel $\alpha = 61,95^\circ$ und die Hypotenuse $\overline{AB} = 8$ cm bekannt sind, errechnen sich die fehlenden Seiten \overline{AD} und \overline{BD} als:

$$\cos \alpha = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} \Rightarrow \cos 61,95^\circ = \frac{\overline{AD}}{8} \Rightarrow \overline{AD} = 8 \cdot \cos 61,95^\circ = 3,76 \text{ cm}$$

$$\sin \alpha = \frac{\overline{BD}}{\overline{AB}} \Rightarrow \sin 61,95^\circ = \frac{\overline{BD}}{8} \Rightarrow \overline{BD} = 8 \cdot \sin 61,95^\circ = 7,06 \text{ cm}$$

Die Dreieckseiten \overline{AD} und \overline{BD} sind dann die Voraussetzung für die Berechnung von Umfang und Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle ABD$.



V. Der Umfang des Dreiecks $\triangle ABD$ ist die Summe der Dreiecksseiten, also:

$$u = \overline{AB} + \overline{AD} + \overline{BD} = 8 + 3,76 + 7,06 = 18,82 \approx 18,8 \text{ cm.}$$

VI. Der Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks $\triangle ABD$ ist die Hälfte des Produkts der Katheten im Dreieck und damit:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \overline{AD} \cdot \overline{BD} = \frac{1}{2} \cdot 3,76 \cdot 7,06 = 13,27 \approx 13,3 \text{ cm}^2.$$

www.michael-buhlmann.de / 02.2019 / Aufgabe 772