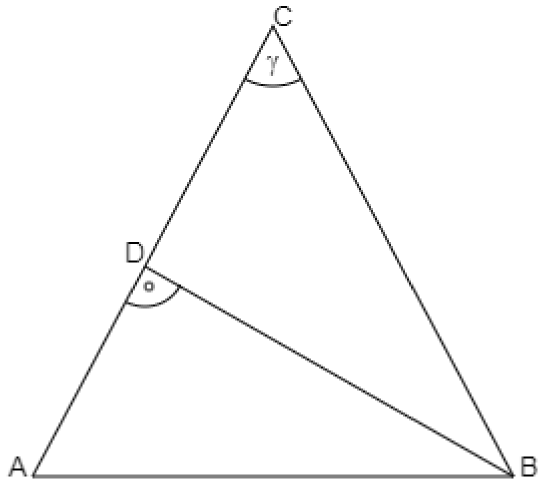
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Geometrie/Trigonometrie
> Dreieckumfang, -flächeninhalt

Aufgabe: Im gleichschenkligen Dreieck ABC mit $\overline{AC} = \overline{BC}$ = 8,5 cm und Winkel γ = 56,1° ist der Umfang und der Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks ABD zu berechnen.



Lösung: I. In einem <u>rechtwinkligen Dreieck</u> ΔABC mit den Seiten a, b, c und den Winkeln α, β, γ bei γ = 90° heißen a und b Katheten, c Hypotenuse. Die Kathete, die gegenüber einem Winkel α oder β liegt, heißt Gegenkathete (bei Winkel α Seite a, bei Winkel β Seite b), die Kathete, die an einem Winkel α oder β liegt, heißt Ankathete (bei Winkel α Seite b, bei Winkel β Seite a). Dann gelten der Satz des Pythagoras:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ (Hypotenuse)}$$
$$a^2 = c^2 - b^2 \Rightarrow a = \sqrt{c^2 - b^2} \text{ (Kathete)}$$
$$b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2} \text{ (Kathete)}$$

und die trigonometrischen Beziehungen (Sinus, Kosinus, Tangens):

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse},\ \cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{Ankathete}{Hypotenuse},\ \tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} \text{ (Winkel α)}$$
$$\sin\beta = \frac{b}{c} = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse},\ \cos\beta = \frac{a}{c} = \frac{Ankathete}{Hypotenuse},\ \tan\beta = \frac{b}{a} = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} \text{ (Winkel β)}$$
$$\sin\alpha = \cos\beta,\ \cos\alpha = \sin\beta,\ \tan\alpha = \frac{1}{\tan\beta},\ \tan\beta = \frac{1}{\tan\alpha}.$$

Mit den Dreieckswinkeln α, β und γ = 90° gelten noch die Beziehungen:

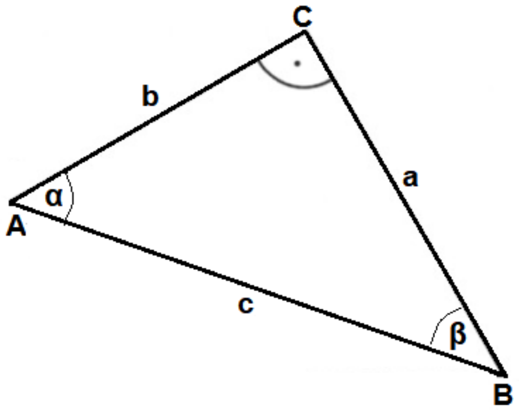
α + β = 90°, α = 90° – β, β = 90° – α.

Mit den Seiten a, b, c des Dreiecks errechnet sich dessen Umfang:

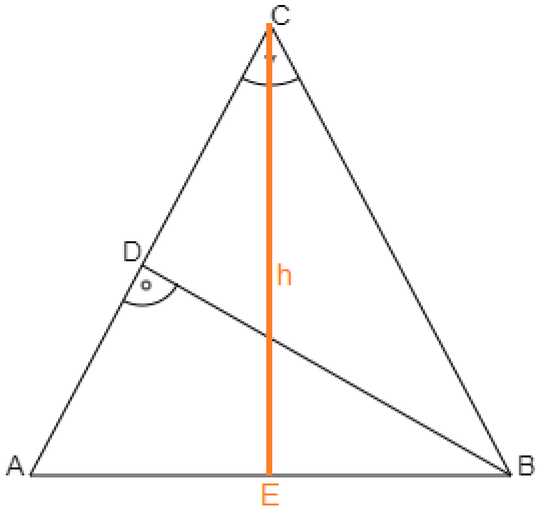
u = a + b + c.

Mit den Katheten a, b ermittelt sich der Flächeninhalt der Dreiecksfläche:

$$A = \frac{1}{2}ab.$$



II. Hinsichtlich der Aufgabenstellung führt das Einzeichnen der Höhe h im gleichschenkligen Dreieck ABC zu:



Der Fußpunkt der Höhe heiße E, die Höhe steht senkrecht auf der Seite $\overline{AB}$.

III. Im rechtwinkligen Dreieck ΔAEC innerhalb des gleichschenkligen Dreiecks ABC hat mit $\overline{AC}$ = 8,5 cm und dem Winkel γ/2 = 56,1° = 28,05° die Seite $\overline{AC}$ den Wert vermöge des Sinus:

$$\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} \Rightarrow \sin 28{,}05° = \frac{\overline{AE}}{8{,}5} \Rightarrow \overline{AE} = 8{,}5 \cdot \sin 28{,}05° = 4 \text{ cm.}$$

Wegen der Gleichschenkligkeit des Dreiecks ABC gilt:

$\overline{AB} = 2 \cdot \overline{AE}$ = 2·4 = 8 cm.

Außerdem errechnet sich der Winkel α als:

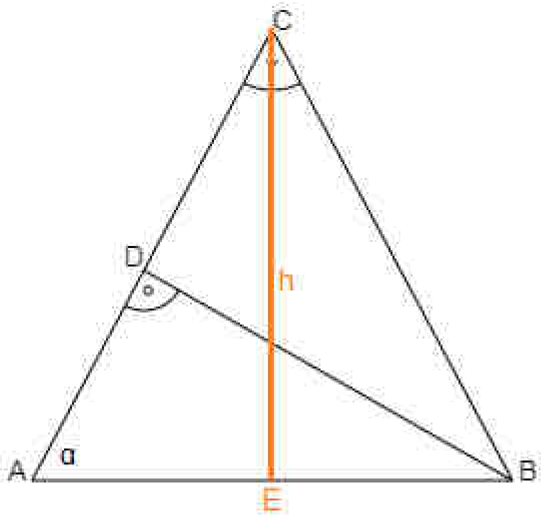
α = 90° – γ/2 = 90° – 28,05° = 61,95°.

IV. Wir betrachten nun das Dreieck ΔABD mit rechtem Winkel an der Ecke D. Da der Winkel α = 61,95° und die Hypotenuse $\overline{AB}$ = 8 cm bekannt sind, errechnen sich die fehlenden Seiten $\overline{AD}$ und $\overline{BD}$ als:

$$\cos\alpha = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} \Rightarrow \cos 61{,}95° = \frac{\overline{AD}}{8} \Rightarrow \overline{AD} = 8 \cdot \cos 61{,}95° = 3{,}76 \text{ cm}$$

$$\sin\alpha = \frac{\overline{BD}}{\overline{AB}} \Rightarrow \sin 61{,}95° = \frac{\overline{BD}}{8} \Rightarrow \overline{BD} = 8 \cdot \sin 61{,}95° = 7{,}06 \text{ cm}$$

Die Dreieckseiten $\overline{AD}$ und $\overline{BD}$ sind dann die Voraussetzung für die Berechnung von Umfang und Flächeninhalt des Dreiecks ΔABD.



V. Der Umfang des Dreiecks ΔABD ist die Summe der Dreiecksseiten, also:

u = $\overline{AB} + \overline{AD} + \overline{BD}$ = 8 + 3,76 + 7,06 = 18,82 ≈ 18,8 cm.

VI. Der Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks ΔABD ist die Hälfte des Produkts der Katheten im Dreieck und damit:

A = $\frac{1}{2} \cdot \overline{AD} \cdot \overline{BD} = \frac{1}{2} \cdot 3{,}76 \cdot 7{,}06$ = 13,27 ≈ 13,3 cm^2.

www.michael-buhlmann.de / 02.2019 / Aufgabe 772