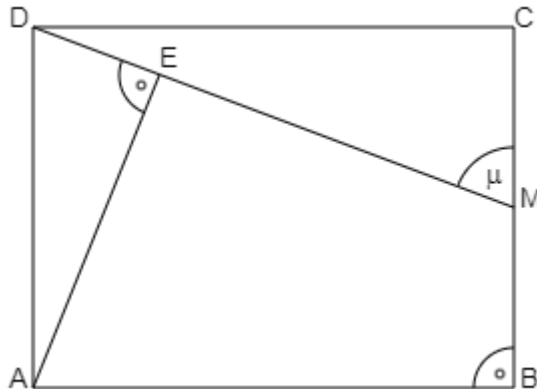


# Mathematikaufgaben

## > Geometrie/Trigonometrie

### > Rechteckflächeninhalt

**Aufgabe:** Im Rechteck ABCD ist M die Mitte der Seite  $\overline{BC}$ , der Winkel  $\mu = 69,4^\circ$ . Zudem gilt:  $\overline{AE} = 5,6$  cm. Berechne den Flächeninhalt des Rechtecks ABCD.



**Lösung:** I. In einem rechtwinkligen Dreieck  $\triangle ABC$  mit den Seiten  $a, b, c$  und den Winkeln  $\alpha, \beta, \gamma$  bei  $\gamma = 90^\circ$  heißen  $a$  und  $b$  Katheten,  $c$  Hypotenuse. Die Kathete, die gegenüber einem Winkel  $\alpha$  oder  $\beta$  liegt, heißt Gegenkathete (bei Winkel  $\alpha$  Seite  $a$ , bei Winkel  $\beta$  Seite  $b$ ), die Kathete, die an einem Winkel  $\alpha$  oder  $\beta$  liegt, heißt Ankathete (bei Winkel  $\alpha$  Seite  $b$ , bei Winkel  $\beta$  Seite  $a$ ). Dann gelten der Satz des Pythagoras:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (\text{Hypotenuse})$$

$$a^2 = c^2 - b^2 \Rightarrow a = \sqrt{c^2 - b^2} \quad (\text{Kathete})$$

$$b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2} \quad (\text{Kathete})$$

und die trigonometrischen Beziehungen (Sinus, Kosinus, Tangens):

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \quad (\text{Winkel } \alpha)$$

$$\sin \beta = \frac{b}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \cos \beta = \frac{a}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \tan \beta = \frac{b}{a} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \quad (\text{Winkel } \beta)$$

$$\sin \alpha = \cos \beta, \quad \cos \alpha = \sin \beta, \quad \tan \alpha = \frac{1}{\tan \beta}, \quad \tan \beta = \frac{1}{\tan \alpha}.$$

Mit den Dreieckswinkeln  $\alpha, \beta$  und  $\gamma = 90^\circ$  gelten noch die Beziehungen:

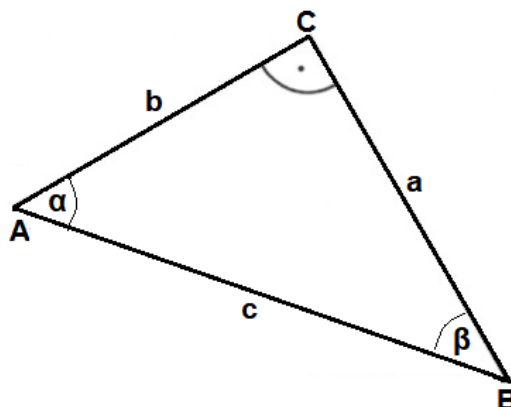
$$\alpha + \beta = 90^\circ, \quad \alpha = 90^\circ - \beta, \quad \beta = 90^\circ - \alpha.$$

Mit den Seiten  $a, b, c$  des Dreiecks errechnet sich dessen Umfang:

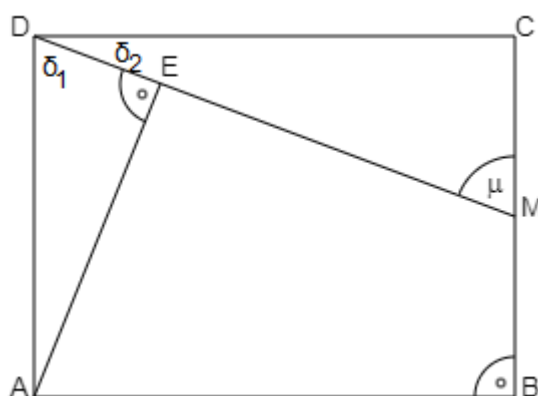
$$u = a + b + c.$$

Mit den Katheten  $a, b$  ermittelt sich der Flächeninhalt der Dreiecksfläche:

$$A = \frac{1}{2} ab.$$



II. Wir betrachten zunächst das Dreieck  $\triangle AED$  mit rechtem Winkel an der Ecke E. Der Winkel  $\delta_1$  an der Ecke D ist der Winkel  $\delta_1 = \mu = 69,4^\circ$ , weil  $\delta_2 = 90^\circ - 69,4^\circ = 20,6^\circ$  und  $\delta_1 + \delta_2 = 90^\circ$  ist.



Da die Gegenkathete  $\overline{AE} = 5,6$  cm bekannt ist, lässt sich die Hypotenuse  $\overline{AD}$  mit dem Sinus berechnen:

$$\sin \delta_1 = \frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} \Rightarrow \sin 69,4^\circ = \frac{5,6}{\overline{AD}} \Rightarrow \overline{AD} = \frac{5,6}{\sin 69,4^\circ} = 6 \text{ cm.}$$

Die Hypotenuse  $\overline{AD}$  ist aber die Breite des Rechtecks ABCD.

III. Im rechtwinkligen Dreieck  $\triangle MCD$  ist nun:

$$\overline{MC} = \frac{1}{2} \overline{AD} = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3 \text{ cm,}$$

so dass wir mit dem Winkel  $\delta_2 = 20,6^\circ$  die Rechtecklänge als Ankathete  $\overline{CD}$  vermöge des Tangens bestimmen können:

$$\tan \delta_2 = \frac{\overline{MC}}{\overline{CD}} \Rightarrow \tan 20,6^\circ = \frac{3}{\overline{CD}} \Rightarrow \overline{CD} = \frac{3}{\tan 20,6^\circ} = 8 \text{ cm.}$$

IV. Der Flächeninhalt des Rechtecks ABCD ist das Produkt der Rechteckseiten und damit:

$$A = \overline{CD} \cdot \overline{AD} = 8 \cdot 6 = 48 \text{ cm}^2.$$