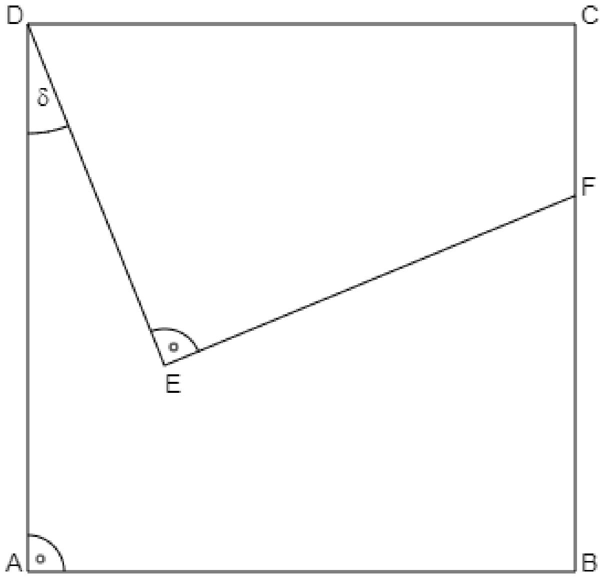
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Geometrie/Trigonometrie
> Viereckumfang

Aufgabe: Die Seitenlänge des Quadrats ABCD beträgt 8 cm. Im Quadrat ist die Strecke $\overline{DE}$ = 5,4 cm, der Winkel δ = 21,8°. Berechne den Umfang des Vierecks CDEF.



Lösung: I. In einem <u>rechtwinkligen Dreieck</u> ΔABC mit den Seiten a, b, c und den Winkeln α, β, γ bei γ = 90° heißen a und b Katheten, c Hypotenuse. Die Kathete, die gegenüber einem Winkel α oder β liegt, heißt Gegenkathete (bei Winkel α Seite a, bei Winkel β Seite b), die Kathete, die an einem Winkel α oder β liegt, heißt Ankathete (bei Winkel α Seite b, bei Winkel β Seite a). Dann gelten der Satz des Pythagoras:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ (Hypotenuse)}$$
$$a^2 = c^2 - b^2 \Rightarrow a = \sqrt{c^2 - b^2} \text{ (Kathete)}$$
$$b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow c = \sqrt{c^2 - a^2} \text{ (Kathete)}$$

und die trigonometrischen Beziehungen (Sinus, Kosinus, Tangens):

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse},\ \cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{Ankathete}{Hypotenuse},\ \tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} \text{ (Winkel α)}$$
$$\sin\beta = \frac{b}{c} = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse},\ \cos\beta = \frac{a}{c} = \frac{Ankathete}{Hypotenuse},\ \tan\beta = \frac{b}{a} = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} \text{ (Winkel β)}$$
$$\sin\alpha = \cos\beta,\ \cos\alpha = \sin\beta,\ \tan\alpha = \frac{1}{\tan\beta},\ \tan\beta = \frac{1}{\tan\alpha}.$$

Mit den Dreieckswinkeln α, β und γ = 90° gelten noch die Beziehungen:

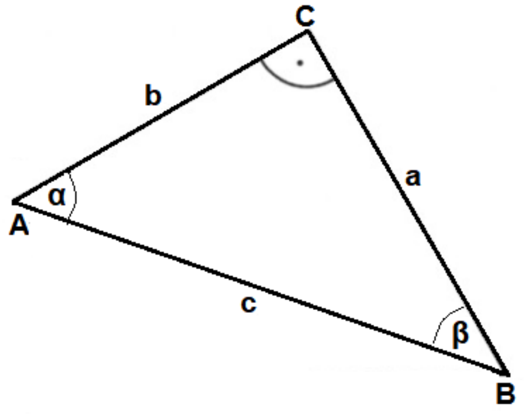
$$\alpha + \beta = 90°,\ \alpha = 90° - \beta,\ \beta = 90° - \alpha.$$

Mit den Seiten a, b, c des Dreiecks errechnet sich dessen Umfang:

$$u = a + b + c.$$

Mit den Katheten a, b ermittelt sich der Flächeninhalt der Dreiecksfläche:

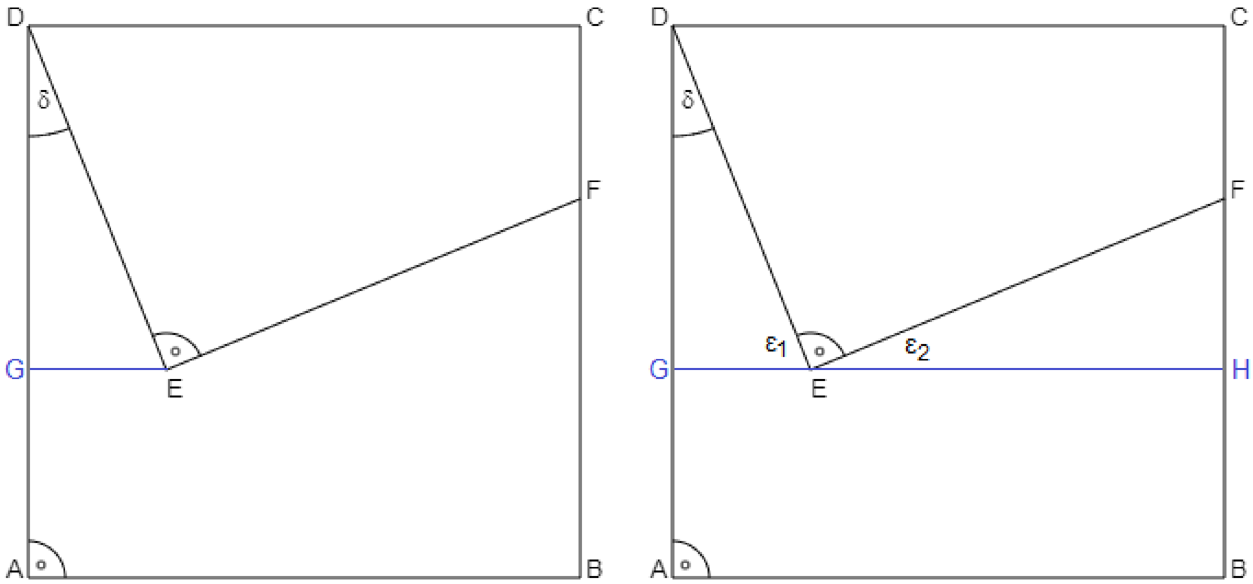
$$A = \frac{1}{2}ab\,.$$



II. Wir betrachten zunächst im Quadrat das Dreieck ΔDGE mit rechtem Winkel an der Ecke G. Mit dem Winkel δ = 21,8° und der Hypotenuse $\overline{DE}$ = 5,4 cm ergeben sich die Dreieckseiten $\overline{DG}$ und $\overline{EG}$ wie folgt:

$$\sin\delta = \frac{\overline{EG}}{\overline{\overline{DE}}} \Rightarrow \sin 21{,}8° = \frac{\overline{EG}}{5{,}4} \Rightarrow \overline{EG} = 5{,}4 \cdot \sin 21{,}8° = 2 \text{ cm}$$

$$\cos\delta = \frac{\overline{DG}}{\overline{\overline{DE}}} \Rightarrow \cos 21{,}8° = \frac{\overline{DG}}{5{,}4} \Rightarrow \overline{DG} = 5{,}4 \cdot \cos 21{,}8° = 5 \text{ cm}.$$



III. Im rechtwinkligen Dreieck ΔEHF ist der Winkel ε_2 = δ = 21,8° wegen: ε_1 = 90° – δ = 90° – 21,8° = 68,2° und ε_2 = 180° – 90° – ε_1 = 90° – 68,2° = 21,8°. Zudem ist Quadratseite $\overline{AB}$ = 8 cm lang. Die Kathete $\overline{EH}$ im Dreieck ΔEHF hat somit die Länge:

$$\overline{EH} = \overline{AB} - \overline{EG} = 8 - 2 = 6 \text{ cm}.$$

Die Länge der Gegenkathete $\overline{FH}$ zum Winkel ε_2 = 21,8° errechnet sich nun mit dem Tangens als:

$$\tan\varepsilon_2 = \frac{\overline{FH}}{\overline{\overline{EH}}} \Rightarrow \tan 21{,}8° = \frac{\overline{FH}}{6} \Rightarrow \overline{FH} = 6 \cdot \tan 21{,}8° = 2{,}4 \text{ cm}.$$

Weiter ergibt sich die Hypotenuse $\overline{EF}$ im rechtwinkligen Dreieck nach dem Satz des Pythagoras, also mit:

$\overline{EF}^2 = \overline{EH}^2 + FH^2 = 6^2 + 2,4^2 = 41,76 \Rightarrow \overline{AF} = \sqrt{41,76}$ = 6,46 ≈ 6,5 cm.

Mit $\overline{EF}$ erhalten wir neben der vorgegebenen Seite $\overline{DE}$ eine weitere Seite des Vierecks CDEF.

IV. Zur Bestimmung der Seite $\overline{CF}$ des Vierecks CDEF ist zunächst $\overline{BH}$ gemäß:

$\overline{BH} = \overline{AG} = \overline{AD} - \overline{DG}$ = 8 – 5 = 3 cm

zu bestimmen. Weiter ist:

$\overline{BF} = \overline{BH} + \overline{FH}$ = 3 + 2,4 = 5,4 cm

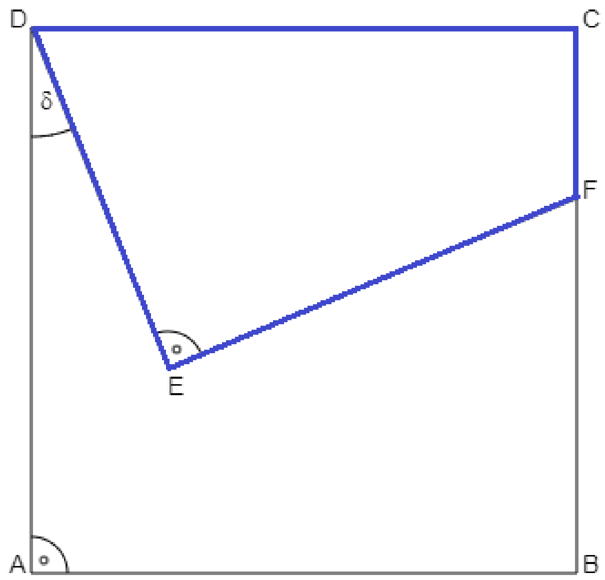
und schließlich wegen der Quadratseite $\overline{BC}$ = 8 cm:

$\overline{CF} = \overline{BC} - \overline{BF}$ = 8 – 5,4 = 2,6 cm.

V. Die Quadratseite $\overline{CD}$ = 8 cm komplettiert als letzte Seite des Vierecks CDEF den gesuchten Umfang, so dass

u = $\overline{CD} + \overline{DE} + \overline{EF} + \overline{FC}$ = 8 + 5,4 + 6,5 + 2,6 = 22,5 cm

gilt.



Der gesuchte Umfang beträgt:

u = 22,5 cm.

www.michael-buhlmann.de / 02.2019 / Aufgabe 776