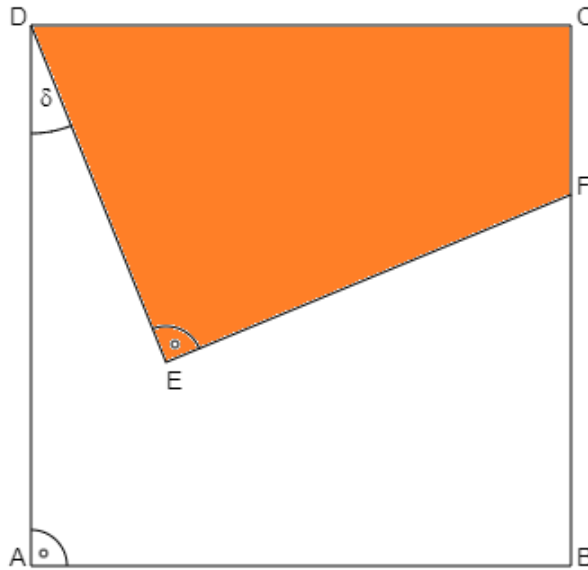


Mathematikaufgaben

> Geometrie/Trigonometrie

> Viereckflächeninhalt

Aufgabe: Die Seitenlänge des Quadrats ABCD beträgt 8 cm. Im Quadrat ist die Strecke $\overline{DE} = 5,4$ cm, der Winkel $\delta = 21,8^\circ$. Berechne den Flächeninhalt des Vierecks CDEF.



Lösung: I. In einem rechtwinkligen Dreieck $\triangle ABC$ mit den Seiten a, b, c und den Winkeln α, β, γ bei $\gamma = 90^\circ$ heißen a und b Katheten, c Hypotenuse. Die Kathete, die gegenüber einem Winkel α oder β liegt, heißt Gegenkathete (bei Winkel α Seite a , bei Winkel β Seite b), die Kathete, die an einem Winkel α oder β liegt, heißt Ankathete (bei Winkel α Seite b , bei Winkel β Seite a). Dann gelten der Satz des Pythagoras:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (\text{Hypotenuse})$$

$$a^2 = c^2 - b^2 \Rightarrow a = \sqrt{c^2 - b^2} \quad (\text{Kathete})$$

$$b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2} \quad (\text{Kathete})$$

und die trigonometrischen Beziehungen (Sinus, Kosinus, Tangens):

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \quad (\text{Winkel } \alpha)$$

$$\sin \beta = \frac{b}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \cos \beta = \frac{a}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \tan \beta = \frac{b}{a} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \quad (\text{Winkel } \beta)$$

$$\sin \alpha = \cos \beta, \quad \cos \alpha = \sin \beta, \quad \tan \alpha = \frac{1}{\tan \beta}, \quad \tan \beta = \frac{1}{\tan \alpha}.$$

Mit den Dreieckswinkeln α, β und $\gamma = 90^\circ$ gelten noch die Beziehungen:

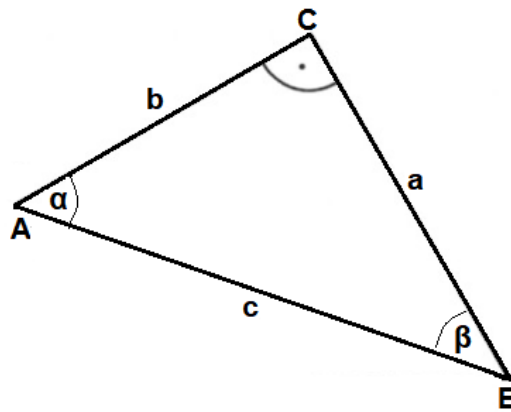
$$\alpha + \beta = 90^\circ, \quad \alpha = 90^\circ - \beta, \quad \beta = 90^\circ - \alpha.$$

Mit den Seiten a, b, c des Dreiecks errechnet sich dessen Umfang:

$$u = a + b + c.$$

Mit den Katheten a, b ermittelt sich der Flächeninhalt der Dreiecksfläche:

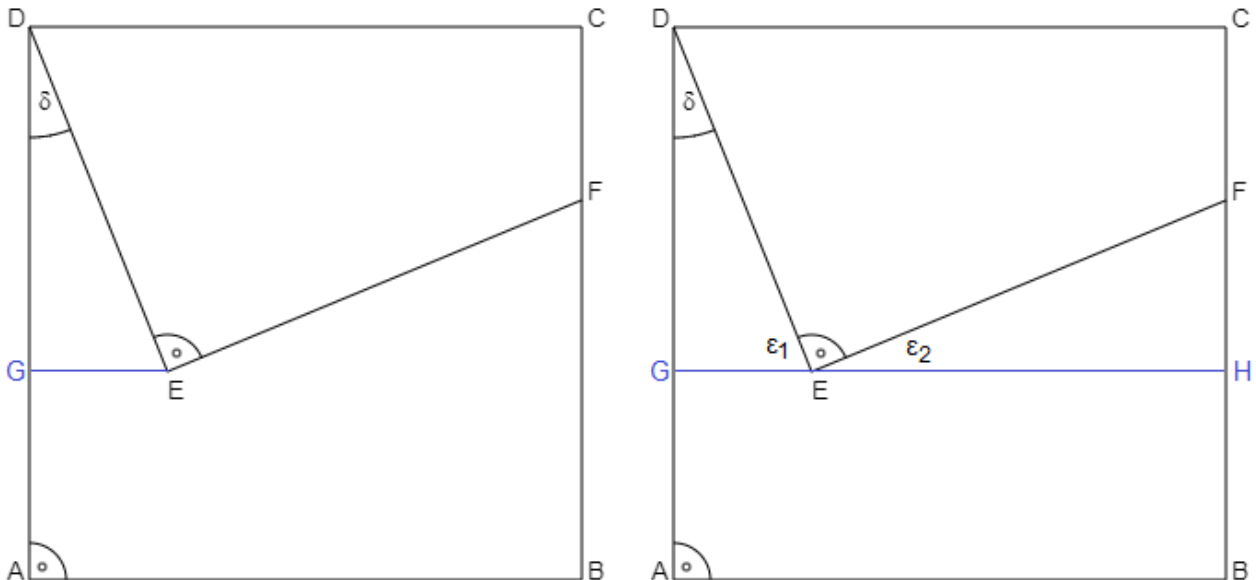
$$A = \frac{1}{2} ab.$$



II. Wir betrachten zunächst im Quadrat das Dreieck $\triangle DGE$ mit rechtem Winkel an der Ecke G. Mit dem Winkel $\delta = 21,8^\circ$ und der Hypotenuse $\overline{DE} = 5,4$ cm ergeben sich die Dreieckseiten \overline{DG} und \overline{EG} wie folgt:

$$\sin \delta = \frac{\overline{EG}}{\overline{DE}} \Rightarrow \sin 21,8^\circ = \frac{\overline{EG}}{5,4} \Rightarrow \overline{EG} = 5,4 \cdot \sin 21,8^\circ = 2 \text{ cm}$$

$$\cos \delta = \frac{\overline{DG}}{\overline{DE}} \Rightarrow \cos 21,8^\circ = \frac{\overline{DG}}{5,4} \Rightarrow \overline{DG} = 5,4 \cdot \cos 21,8^\circ = 5 \text{ cm}.$$



III. Im rechtwinkligen Dreieck $\triangle EHF$ ist der Winkel $\varepsilon_2 = \delta = 21,8^\circ$ wegen: $\varepsilon_1 = 90^\circ - \delta = 90^\circ - 21,8^\circ = 68,2^\circ$ und $\varepsilon_2 = 180^\circ - 90^\circ - \varepsilon_1 = 90^\circ - 68,2^\circ = 21,8^\circ$. Die Quadratseite ist $\overline{AB} = 8$ cm lang. Die Kathete \overline{EH} im Dreieck $\triangle EHF$ hat somit die Länge:

$$\overline{EH} = \overline{AB} - \overline{EG} = 8 - 2 = 6 \text{ cm}.$$

Die Länge der Gegenkathete \overline{FH} zum Winkel $\varepsilon_2 = 21,8^\circ$ errechnet sich nun mit dem Tangens als:

$$\tan \varepsilon_2 = \frac{\overline{FH}}{\overline{EH}} \Rightarrow \tan 21,8^\circ = \frac{\overline{FH}}{6} \Rightarrow \overline{FH} = 6 \cdot \tan 21,8^\circ = 2,4 \text{ cm}.$$

IV. Wir berechnen nun noch die Länge \overline{AG} als:

$$\overline{AG} = \overline{AD} - \overline{DG} = 8 - 5 = 3 \text{ cm.}$$

und haben damit alle für die Ermittlung des gesuchten Viereckflächeninhalts nötigen Größen gefunden.

V. Der Flächeninhalt des Vierecks CDEF errechnet sich als Differenz von Quadratflächeninhalt minus den Flächeninhalten der Dreiecke $\triangle DGE$ und $\triangle EHF$ sowie des Rechtecks ABHG:

$$A_{CDEF} = A_{ABCD} - A_{DGE} - A_{EHF} - A_{ABHG}$$

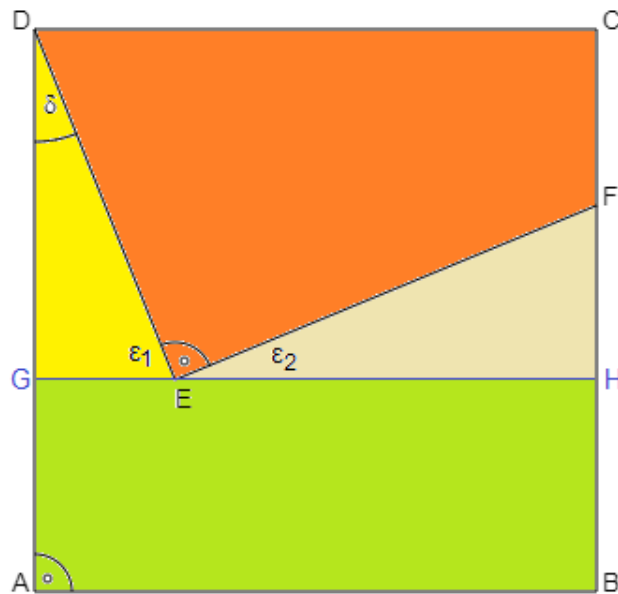
mit:

$$A_{ABCD} = 8^2 = 64 \text{ cm}^2$$

$$A_{DGE} = \frac{1}{2} \cdot \overline{DG} \cdot \overline{EG} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2 = 5 \text{ cm}^2$$

$$A_{EHF} = \frac{1}{2} \cdot \overline{EH} \cdot \overline{FH} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2,4 = 7,2 \text{ cm}^2$$

$$A_{ABHG} = \overline{AB} \cdot \overline{AG} = 8 \cdot 3 = 24 \text{ cm}^2.$$



Damit beträgt der gesuchte Flächeninhalt:

$$A_{CDEF} = 64 - 5 - 7,2 - 24 = 27,8 \text{ cm}^2.$$