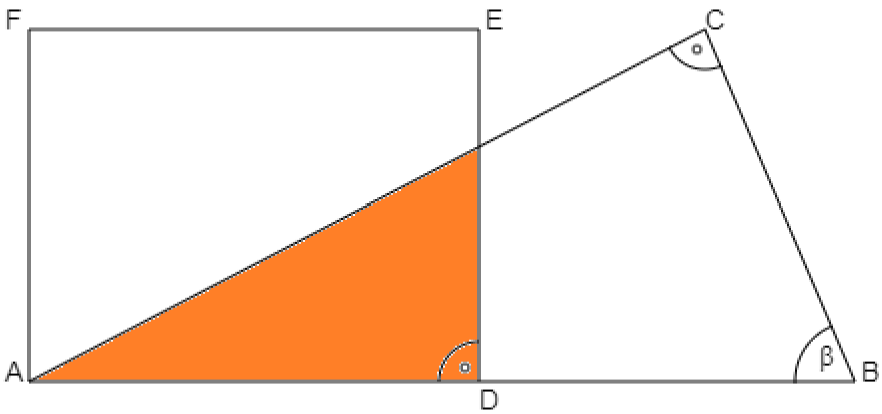
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Geometrie/Trigonometrie
> Flächeninhaltverhältnis

Aufgabe: Das Rechteck ADEF hat eine Länge von 6 cm, seine Höhe entspricht dem Abstand der Ecke C von der Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck ABC. Im Dreieck gilt: β = 67°, $\overline{BC}$ = 5,1 cm. Bestimme den prozentualen Anteil des Flächeninhalts der in das Rechteck hineinragenden Fläche des Dreiecks im Verhältnis zum Flächeninhalt des Rechtecks.



Lösung: I. In einem rechtwinkligen Dreieck ΔABC mit den Seiten a, b, c und den Winkeln α, β, γ bei γ = 90° heißen a und b Katheten, c Hypotenuse. Die Kathete, die gegenüber einem Winkel α oder β liegt, heißt Gegenkathete (bei Winkel α Seite a, bei Winkel β Seite b), die Kathete, die an einem Winkel α oder β liegt, heißt Ankathete (bei Winkel α Seite b, bei Winkel β Seite a). Dann gelten der Satz des Pythagoras:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ (Hypotenuse)}$$
$$a^2 = c^2 - b^2 \Rightarrow a = \sqrt{c^2 - b^2} \text{ (Kathete)}$$
$$b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2} \text{ (Kathete)}$$

und die trigonometrischen Beziehungen (Sinus, Kosinus, Tangens):

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse},\ \cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{Ankathete}{Hypotenuse},\ \tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} \text{ (Winkel α)}$$
$$\sin\beta = \frac{b}{c} = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse},\ \cos\beta = \frac{a}{c} = \frac{Ankathete}{Hypotenuse},\ \tan\beta = \frac{b}{a} = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} \text{ (Winkel β)}$$
$$\sin\alpha = \cos\beta,\ \cos\alpha = \sin\beta,\ \tan\alpha = \frac{1}{\tan\beta},\ \tan\beta = \frac{1}{\tan\alpha}.$$

Mit den Dreieckswinkeln α, β und γ = 90° gelten noch die Beziehungen:

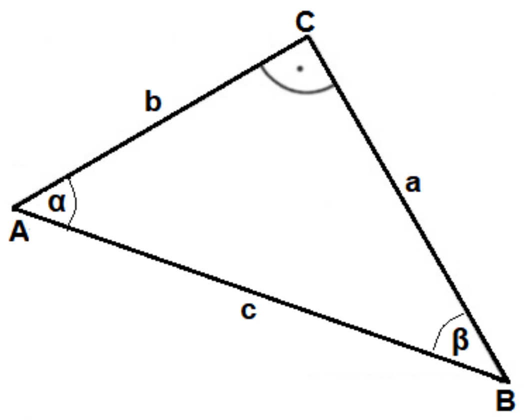
α + β = 90°, α = 90° – β, β = 90° – α.

Mit den Seiten a, b, c des Dreiecks errechnet sich dessen Umfang:

u = a + b + c.

Mit den Katheten a, b ermittelt sich der Flächeninhalt der Dreiecksfläche:

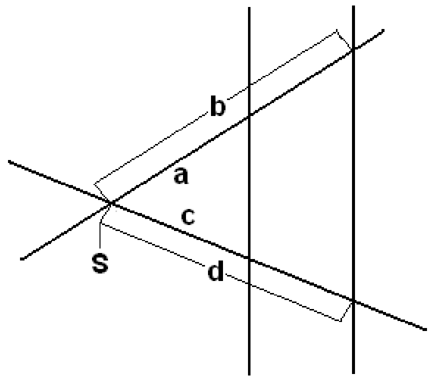
$$A = \frac{1}{2}ab.$$



II. Es gelten die Strahlensätze, wenn zwei von einem Strahlenzentrum S ausgehende Geraden von zwei parallelen Geraden geschnitten werden:

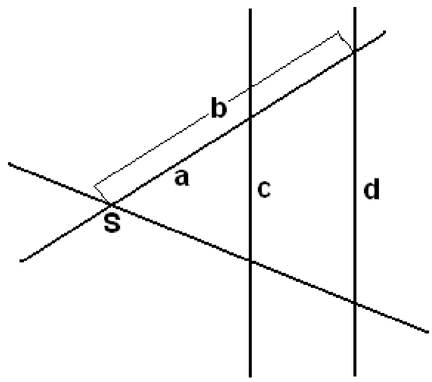
1. Strahlensatz: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ bzw. $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

für jeweils zwei bei S beginnende Strecken a und b auf dem ersten sowie c und d auf dem zweiten Geradenstrahl.

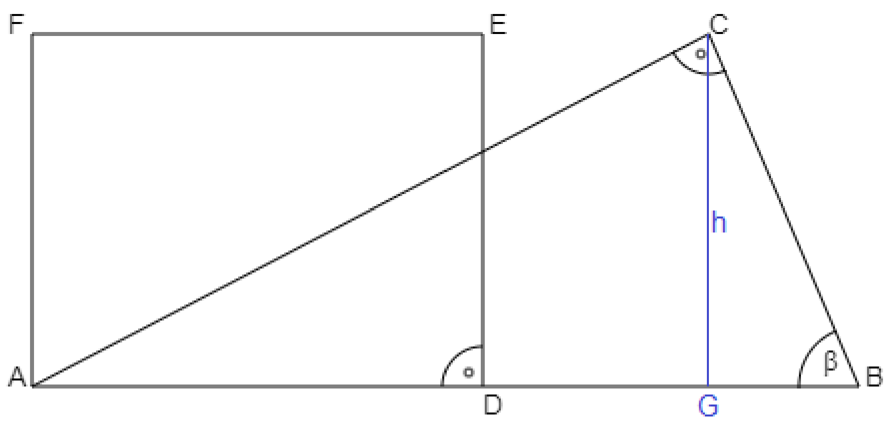


2. Strahlensatz: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ bzw. $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

für die zwei bei S beginnenden Strecken a und b auf einem Geradenstrahl sowie die Strecken c und d auf den Parallelen.



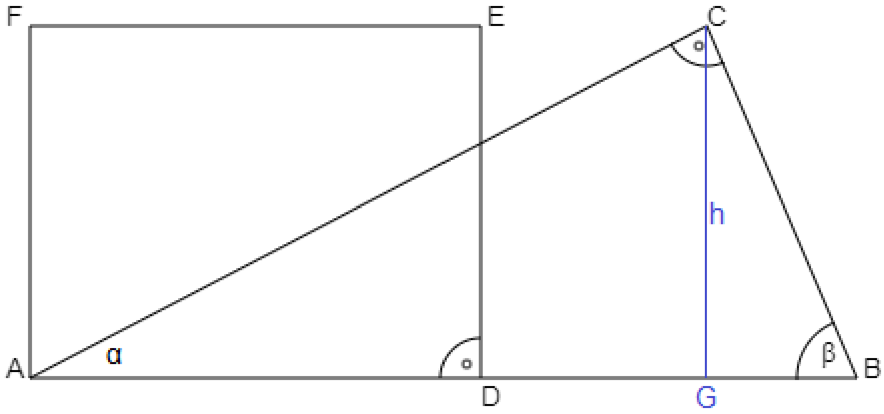
III. Mit h = $\overline{CG}$ bezeichnen wir den Abstand des Punktes C von der Seite $\overline{AB}$ im rechtwinkligen Dreieck ΔBCG mit rechtem Winkel an der Ecke G.



Winkel β = 67° und Dreieckhypotenuse $\overline{BC}$ = 5,1 cm ergeben mit Hilfe des Sinus die Höhe h:

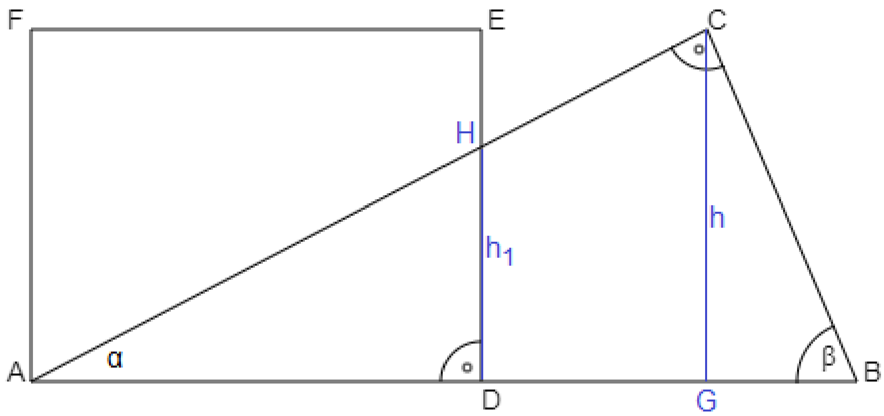
$$\sin\beta = \frac{h}{\overline{BC}} \Rightarrow \sin 67° = \frac{h}{5{,}1} \Rightarrow h = 5{,}1 \cdot \sin 67° = 4{,}7 \text{ cm.}$$

h ist auch die Höhe (Breite) des Rechtecks ADEF.



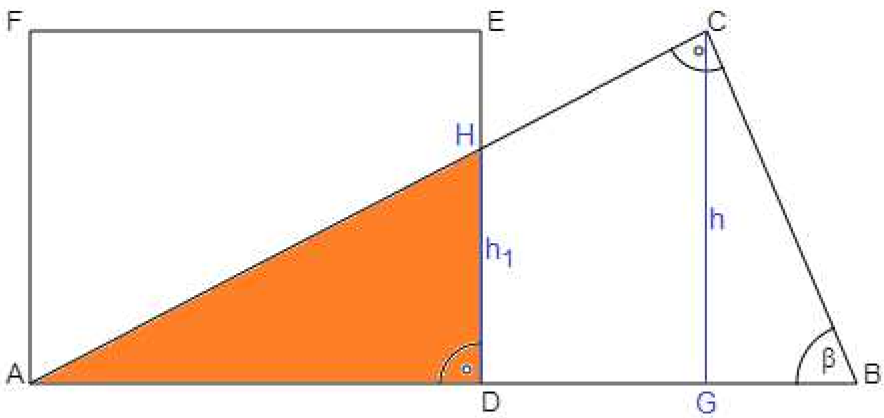
IV. Im Dreieck ΔAGC (bzw. ΔABC) ist der Winkel α = 90° – 67° = 23° groß. Mit h = 5,1 cm erhalten wir mit Hilfe des Tangens:

$$\tan\alpha = \frac{\overline{CG}}{\overline{AG}} = \frac{h}{\overline{AG}} \Rightarrow \tan 23° = \frac{4{,}7}{\overline{AG}} \Rightarrow \overline{AG} = \frac{4{,}7}{\tan 23°} = 11{,}1 \text{ cm.}$$



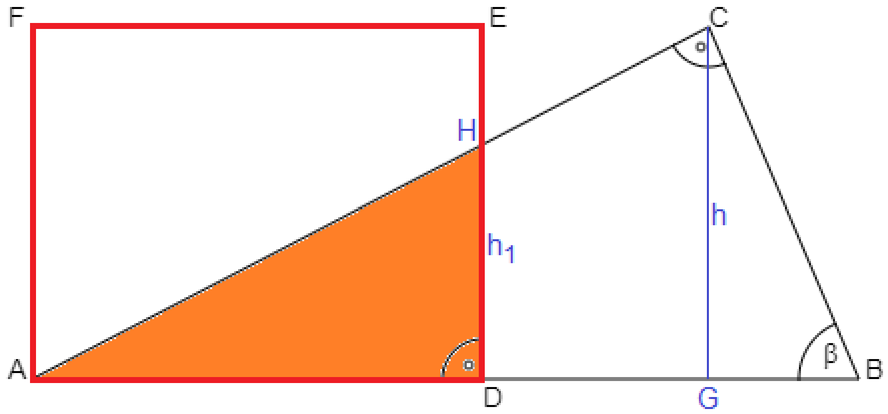
V. Wir bestimmen nun $h_1 = \overline{DH}$ im Dreieck ΔADH nach dem 2. Strahlensatz. Es gilt:

$$\frac{\overline{DH}}{\overline{CG}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AG}} \Rightarrow \frac{h_1}{4{,}7} = \frac{6}{11{,}1} \Rightarrow h_1 = \frac{6 \cdot 4{,}7}{11{,}1} = 2{,}54 \text{ cm.}$$



Der Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks ΔADH ist dann:

$A_{EDH} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AD} \cdot \overline{DH} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2{,}54$ = 7,62 cm^2.



VI. Der Flächeninhalt des Rechtecks ADEF beträgt:

A_{ADEF} = 6·4,7 = 28,2 cm^2.

Das prozentuale Verhältnis der Flächen von Dreieck ΔADH und Rechteck ADEF berechnet sich als:

$\frac{A_{ADH}}{A_{ADEF}} = \frac{7{,}62}{28{,}2} = 0{,}27$ = 27 %.

Der Flächeninhalt des Dreiecks ΔADH macht somit 27 Prozent der des Rechtecks ADEF aus.

www.michael-buhlmann.de / 02.2019 / Aufgabe 778