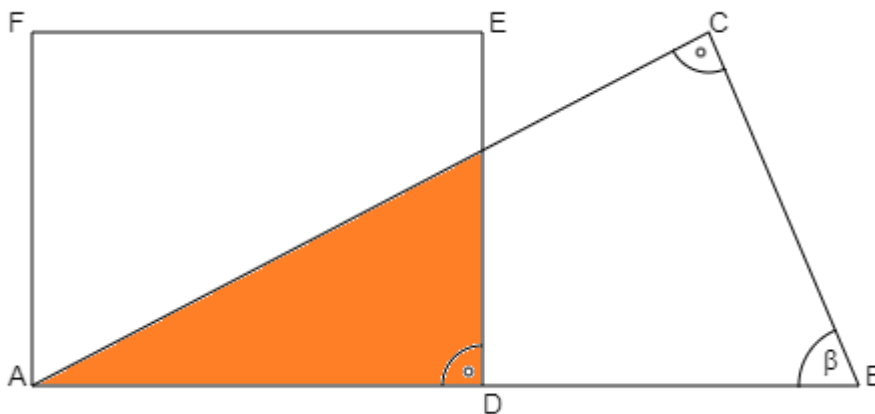


# Mathematikaufgaben

## > Geometrie/Trigonometrie

### > Flächeninhaltverhältnis

**Aufgabe:** Das Rechteck ADEF hat eine Länge von 6 cm, seine Höhe entspricht dem Abstand der Ecke C von der Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck ABC. Im Dreieck gilt:  $\beta = 67^\circ$ ,  $\overline{BC} = 5,1$  cm. Bestimme den prozentualen Anteil des Flächeninhalts der in das Rechteck hineinragenden Fläche des Dreiecks im Verhältnis zum Flächeninhalt des Rechtecks.



**Lösung:** I. In einem rechtwinkligen Dreieck  $\triangle ABC$  mit den Seiten  $a, b, c$  und den Winkeln  $\alpha, \beta, \gamma$  bei  $\gamma = 90^\circ$  heißen  $a$  und  $b$  Katheten,  $c$  Hypotenuse. Die Kathete, die gegenüber einem Winkel  $\alpha$  oder  $\beta$  liegt, heißt Gegenkathete (bei Winkel  $\alpha$  Seite  $a$ , bei Winkel  $\beta$  Seite  $b$ ), die Kathete, die an einem Winkel  $\alpha$  oder  $\beta$  liegt, heißt Ankathete (bei Winkel  $\alpha$  Seite  $b$ , bei Winkel  $\beta$  Seite  $a$ ). Dann gelten der Satz des Pythagoras:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ (Hypotenuse)}$$

$$a^2 = c^2 - b^2 \Rightarrow a = \sqrt{c^2 - b^2} \text{ (Kathete)}$$

$$b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2} \text{ (Kathete)}$$

und die trigonometrischen Beziehungen (Sinus, Kosinus, Tangens):

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \text{ (Winkel } \alpha \text{)}$$

$$\sin \beta = \frac{b}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \cos \beta = \frac{a}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \tan \beta = \frac{b}{a} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \text{ (Winkel } \beta \text{)}$$

$$\sin \alpha = \cos \beta, \quad \cos \alpha = \sin \beta, \quad \tan \alpha = \frac{1}{\tan \beta}, \quad \tan \beta = \frac{1}{\tan \alpha}.$$

Mit den Dreieckswinkeln  $\alpha, \beta$  und  $\gamma = 90^\circ$  gelten noch die Beziehungen:

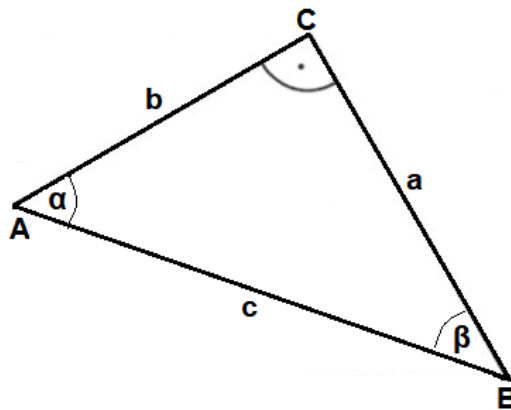
$$\alpha + \beta = 90^\circ, \quad \alpha = 90^\circ - \beta, \quad \beta = 90^\circ - \alpha.$$

Mit den Seiten  $a, b, c$  des Dreiecks errechnet sich dessen Umfang:

$$u = a + b + c.$$

Mit den Katheten  $a, b$  ermittelt sich der Flächeninhalt der Dreiecksfläche:

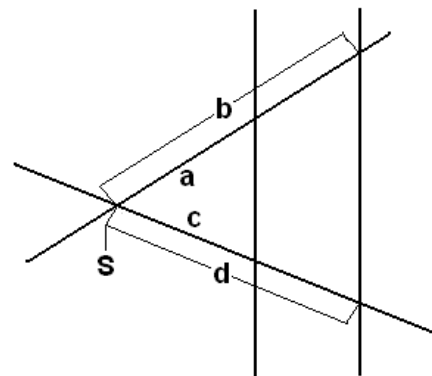
$$A = \frac{1}{2} ab.$$



II. Es gelten die Strahlensätze, wenn zwei von einem Strahlencentrum S ausgehende Geraden von zwei parallelen Geraden geschnitten werden:

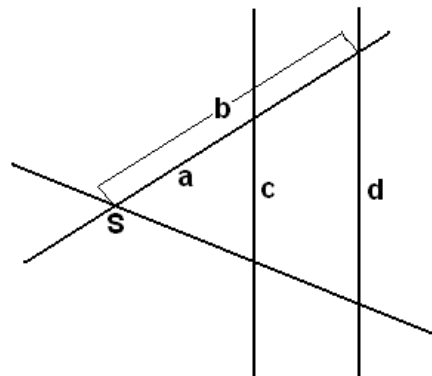
1. Strahlensatz:  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  bzw.  $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

für jeweils zwei bei S beginnende Strecken a und b auf dem ersten sowie c und d auf dem zweiten Geradenstrahl.

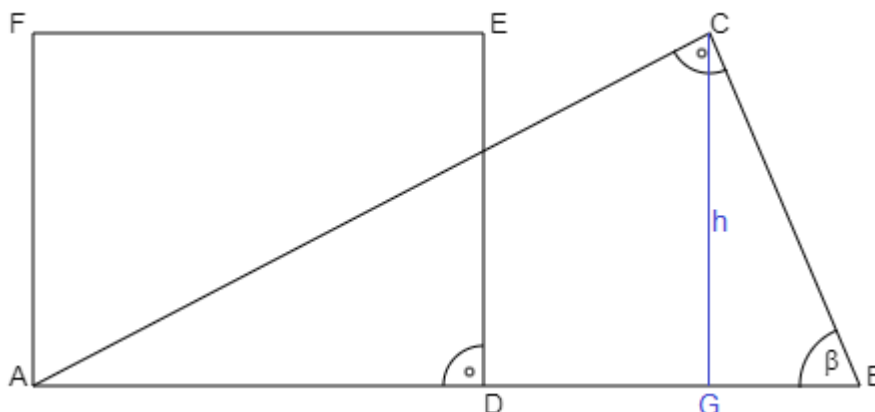


2. Strahlensatz:  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  bzw.  $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

für die zwei bei S beginnenden Strecken a und b auf einem Geradenstrahl sowie die Strecken c und d auf den Parallelen.



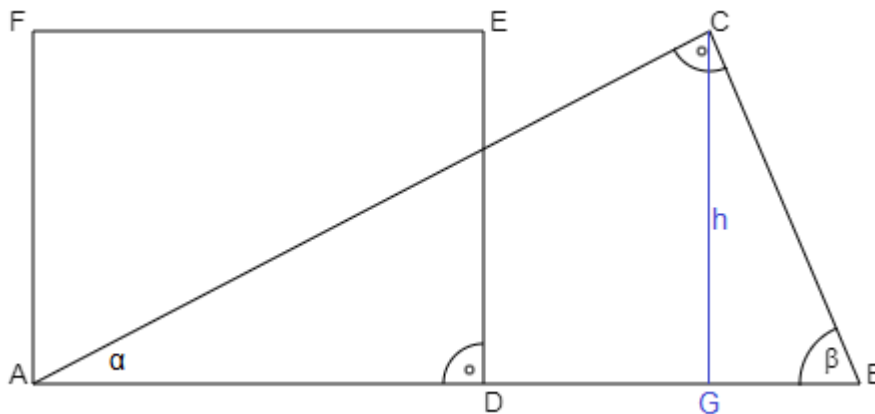
III. Mit  $h = \overline{CG}$  bezeichnen wir den Abstand des Punktes C von der Seite  $\overline{AB}$  im rechtwinkligen Dreieck  $\triangle BCG$  mit rechtem Winkel an der Ecke G.



Winkel  $\beta = 67^\circ$  und Dreieckhypotenuse  $\overline{BC} = 5,1$  cm ergeben mit Hilfe des Sinus die Höhe h:

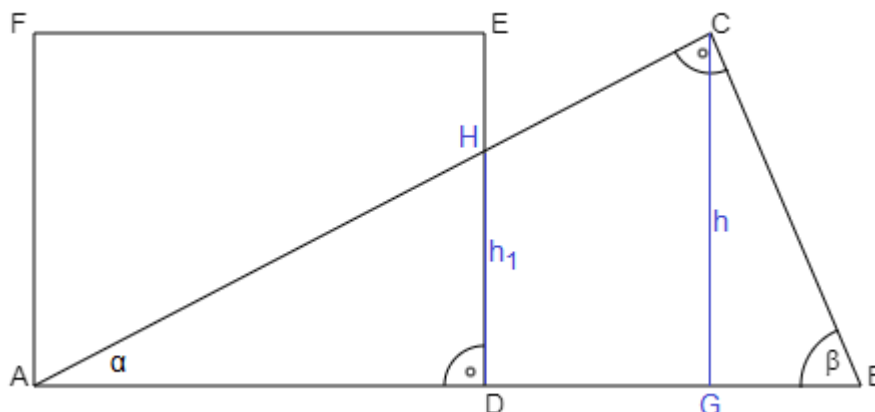
$$\sin \beta = \frac{h}{BC} \Rightarrow \sin 67^\circ = \frac{h}{5,1} \Rightarrow h = 5,1 \cdot \sin 67^\circ = 4,7 \text{ cm.}$$

h ist auch die Höhe (Breite) des Rechtecks ADEF.



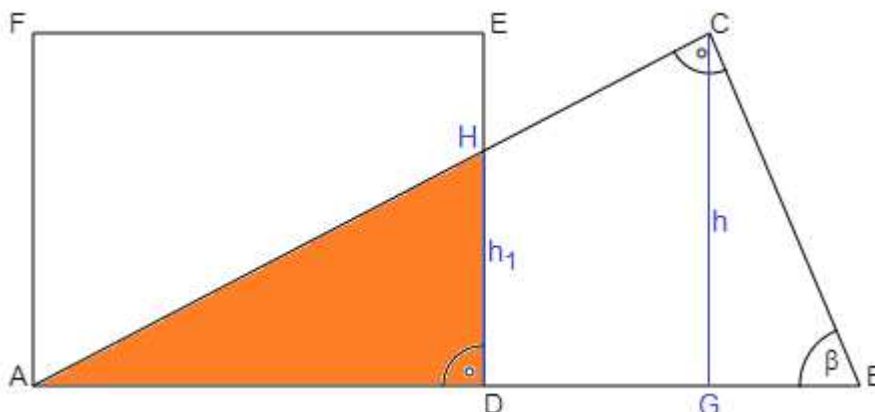
IV. Im Dreieck  $\triangle AGC$  (bzw.  $\triangle ABC$ ) ist der Winkel  $\alpha = 90^\circ - 67^\circ = 23^\circ$  groß. Mit  $h = 5,1$  cm erhalten wir mit Hilfe des Tangens:

$$\tan \alpha = \frac{\overline{CG}}{\overline{AG}} = \frac{h}{AG} \Rightarrow \tan 23^\circ = \frac{4,7}{AG} \Rightarrow \overline{AG} = \frac{4,7}{\tan 23^\circ} = 11,1 \text{ cm.}$$



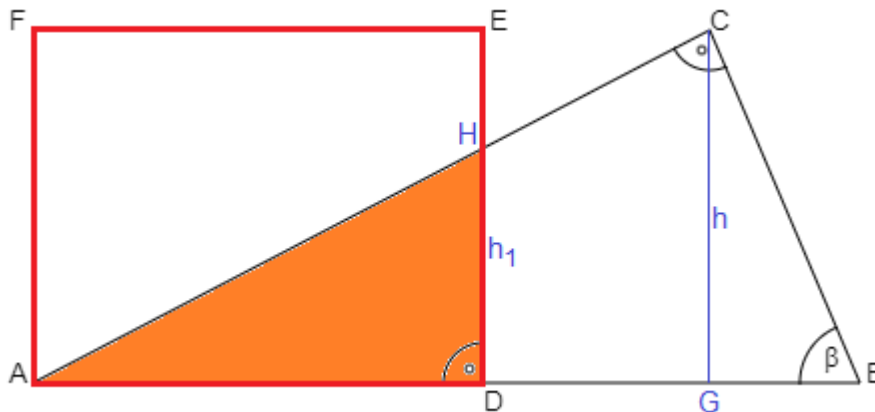
V. Wir bestimmen nun  $h_1 = \overline{DH}$  im Dreieck  $\triangle ADH$  nach dem 2. Strahlensatz. Es gilt:

$$\frac{\overline{DH}}{\overline{CG}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AG}} \Rightarrow \frac{h_1}{4,7} = \frac{6}{11,1} \Rightarrow h_1 = \frac{6 \cdot 4,7}{11,1} = 2,54 \text{ cm.}$$



Der Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks  $\triangle ADH$  ist dann:

$$A_{EDH} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AD} \cdot \overline{DH} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2,54 = 7,62 \text{ cm}^2.$$



VI. Der Flächeninhalt des Rechtecks ADEF beträgt:

$$A_{ADEF} = 6 \cdot 4,7 = 28,2 \text{ cm}^2.$$

Das prozentuale Verhältnis der Flächen von Dreieck  $\triangle ADH$  und Rechteck ADEF berechnet sich als:

$$\frac{A_{ADH}}{A_{ADEF}} = \frac{7,62}{28,2} = 0,27 = 27 \text{ \%}.$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks  $\triangle ADH$  macht somit 27 Prozent der des Rechtecks ADEF aus.