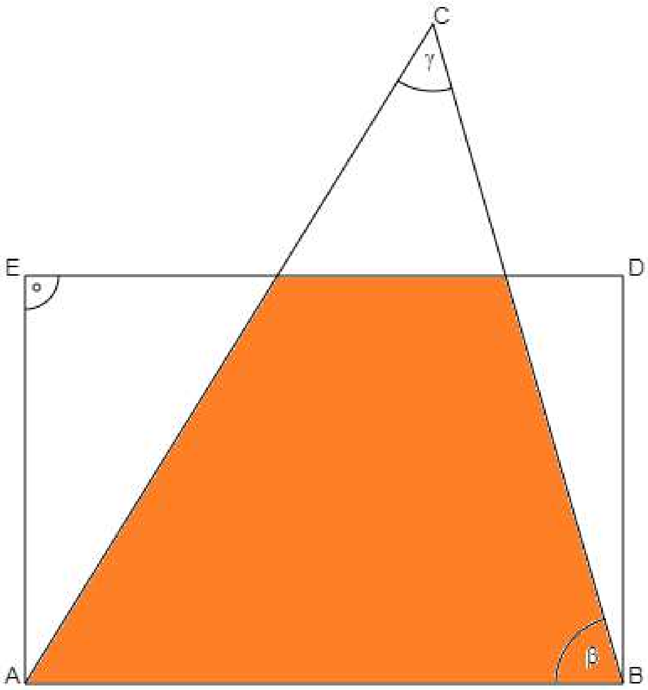
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Geometrie/Trigonometrie
> Trapezflächeninhalt

Aufgabe: Das Rechteck ABDE und das Dreieck ABC haben die Seite $\overline{AB}$ gemeinsam. Im Dreieck gilt: β = 74,1°, γ = 47,7°, $\overline{AC}$ = 12,3 cm. Zudem gilt: $\overline{AE}$ = 6,5 cm. Berechne den Inhalt der Fläche, die das Dreieck ABC innerhalb des Rechtecks ABDE einnimmt.



Lösung: I. In einem rechtwinkligen Dreieck ΔABC mit den Seiten a, b, c und den Winkeln α, β, γ bei γ = 90° heißen a und b Katheten, c Hypotenuse. Die Kathete, die gegenüber einem Winkel α oder β liegt, heißt Gegenkathete (bei Winkel α Seite a, bei Winkel β Seite b), die Kathete, die an einem Winkel α oder β liegt, heißt Ankathete (bei Winkel α Seite b, bei Winkel β Seite a). Dann gelten der Satz des Pythagoras:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ (Hypotenuse)}$$

$$a^2 = c^2 - b^2 \Rightarrow a = \sqrt{c^2 - b^2} \text{ (Kathete)}$$

$$b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow c = \sqrt{c^2 - a^2} \text{ (Kathete)}$$

und die trigonometrischen Beziehungen (Sinus, Kosinus, Tangens):

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse},\ \cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{Ankathete}{Hypotenuse},\ \tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} \text{ (Winkel α)}$$

$$\sin\beta = \frac{b}{c} = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse},\ \cos\beta = \frac{a}{c} = \frac{Ankathete}{Hypotenuse},\ \tan\beta = \frac{b}{a} = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} \text{ (Winkel β)}$$

$$\sin\alpha = \cos\beta,\ \cos\alpha = \sin\beta,\ \tan\alpha = \frac{1}{\tan\beta},\ \tan\beta = \frac{1}{\tan\alpha}.$$

Mit den Dreieckswinkeln α, β und γ = 90° gelten noch die Beziehungen:

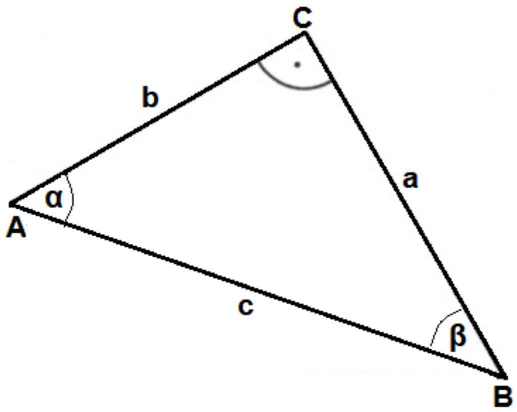
$$\alpha + \beta = 90°, \alpha = 90° - \beta, \beta = 90° - \alpha.$$

Mit den Seiten a, b, c des Dreiecks errechnet sich dessen Umfang:

$$u = a + b + c.$$

Mit den Katheten a, b ermittelt sich der Flächeninhalt der Dreiecksfläche:

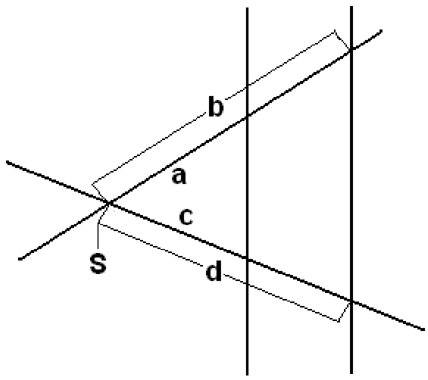
$$A = \frac{1}{2}ab .$$



II. Es gelten die Strahlensätze, wenn zwei von einem Strahlenzentrum S ausgehende Geraden von zwei parallelen Geraden geschnitten werden:

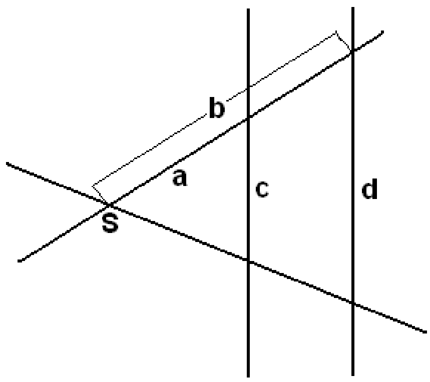
1. Strahlensatz: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ bzw. $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

für jeweils zwei bei S beginnende Strecken a und b auf dem ersten sowie c und d auf dem zweiten Geradenstrahl.



2. Strahlensatz: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ bzw. $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

für die zwei bei S beginnenden Strecken a und b auf einem Geradenstrahl sowie die Strecken c und d auf den Parallelen.



III. Der zu bestimmende Flächeninhalt ist der eines Trapezes. Die Trapezhöhe ist mit $h_{Tr} = \overline{AE} = 6{,}5$ cm bekannt. Zu bestimmen sind im Folgenden also die parallelen Seiten a_{Tr} und c_{Tr} des Trapezes.

IV. Wir betrachten das allgemeine Dreieck ΔABC, das wir mit der Dreieckshöhe $h = \overline{CF}$ als Abstand der Ecke C von der Seite $\overline{AB}$ in zwei rechtwinklige Dreiecke ΔAFC und ΔBCF mit jeweils rechtem Winkel an der Ecke F unterteilen.

V. Im rechtwinkligen Dreieck ΔAFC ist der Winkel α an der Ecke A gemäß der Winkelsumme im

Dreieck:

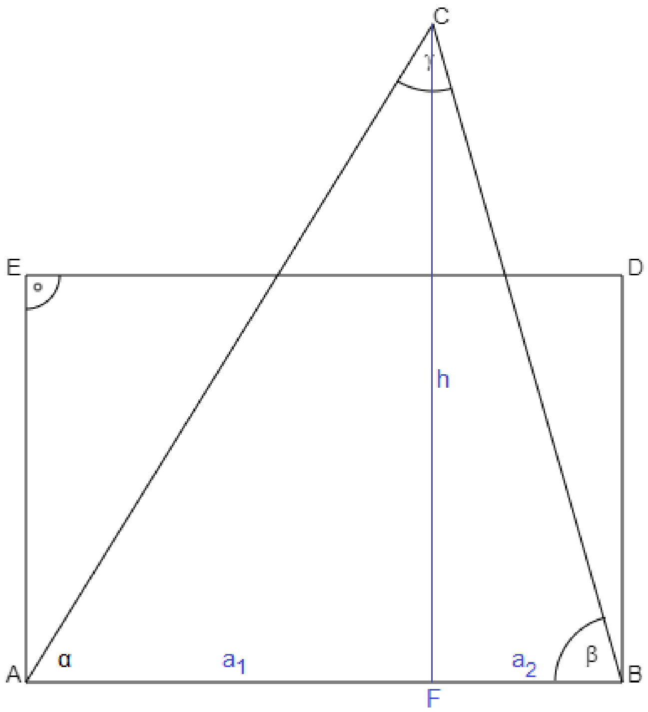
$\alpha = 180° - \beta - \gamma = 180° - 74{,}1° - 47{,}7° = 58{,}2°$.

Die Höhe h = $\overline{CF}$ errechnet sich mit dem Winkel α und dem Sinus:

$$\sin\alpha = \frac{h}{\overline{AC}} \Rightarrow \sin 58{,}2° = \frac{h}{12{,}3} \Rightarrow h = 12{,}3 \cdot \sin 58{,}2° = 10{,}45 \approx 10{,}5 \text{ cm.}$$

Die Seite a_1 = $\overline{AF}$ ermitteln wir mit dem Kosinus:

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{\overline{AC}} \Rightarrow \cos 58{,}2° = \frac{a_1}{12{,}3} \Rightarrow a_1 = 12{,}3 \cdot \cos 58{,}2° = 6{,}48 \approx 6{,}5 \text{ cm.}$$



VI. Im rechtwinkligen Dreieck ΔBCF lässt sich a_2 = $\overline{BF}$ mit dem Winkel β = 74,1° bestimmen als:

$$\tan\beta = \frac{h}{a_2} \Rightarrow \tan 74{,}1° = \frac{10{,}5}{a_2} \Rightarrow a_2 = \frac{10{,}5}{\tan 74{,}1°} = 3 \text{ cm.}$$

VI. Die noch fehlende Seite a = $\overline{AB}$ des Rechtecks ABDE bestimmt sich dann als:

$a = a_1 + a_2 = 9{,}5$ cm.

Die Seite a ist Seite des Trapezes im Rechteck ABDE, also: $a_{Tr} = a = 9{,}5$ cm.

VII. Die Trapezseite c_{Tr} berechnet sich mit $a_{Tr} = 9{,}5$ cm und den Seiten h = 10,45 cm und $\overline{AE}$ = 6,5 cm nach dem 2. Strahlensatz:

$$\frac{c_{Tr}}{a_{Tr}} = \frac{h - \overline{AE}}{h} \Rightarrow \frac{c_{Tr}}{9{,}5} = \frac{10{,}5 - 6{,}5}{10{,}5} \Rightarrow c_{Tr} = \frac{4}{10{,}5} \cdot 9{,}5 = 3{,}62 \approx 3{,}6 \text{ cm.}$$

VIII. Der gesuchte Flächeninhalt des Trapezes ergibt sich als:

$$A_{Tr} = \frac{a_{Tr} + c_{Tr}}{2} \cdot h_{Tr} = \frac{9{,}5 + 3{,}6}{2} \cdot 6{,}5 = 42{,}58 \approx 42{,}6 \text{ cm}^2.$$

www.michael-buhlmann.de / 02.2019 / Aufgabe 779