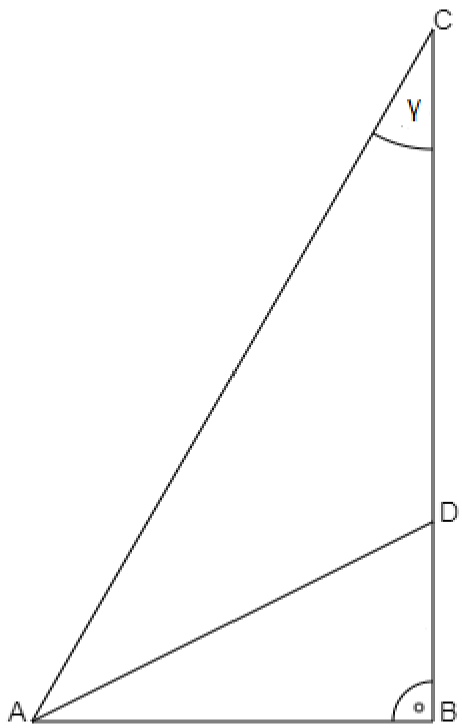
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Geometrie/Trigonometrie
> Abstand Ecke – Seite

Aufgabe: Die rechtwinkligen Dreiecke ABC und ABD haben die Seite $\overline{AB}$ gemeinsam. Im Dreieck ABC gilt: γ = 32,4°, im Dreieck ABD: $\overline{BD}$ = 5,6 cm. Außerdem halbiert die Seite $\overline{AD}$ den Winkel α an der Ecke A des Dreiecks ABC.



Berechne den Abstand der Ecke B zur Seite $\overline{AD}$ im Dreieck ABC.

Lösung: I. In einem rechtwinkligen Dreieck ΔABC mit den Seiten a, b, c und den Winkeln α, β, γ bei γ = 90° heißen a und b Katheten, c Hypotenuse. Die Kathete, die gegenüber einem Winkel α oder β liegt, heißt Gegenkathete (bei Winkel α Seite a, bei Winkel β Seite b), die Kathete, die an einem Winkel α oder β liegt, heißt Ankathete (bei Winkel α Seite b, bei Winkel β Seite a). Dann gelten der Satz des Pythagoras:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ (Hypotenuse)}$$
$$a^2 = c^2 - b^2 \Rightarrow a = \sqrt{c^2 - b^2} \text{ (Kathete)}$$
$$b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow c = \sqrt{c^2 - a^2} \text{ (Kathete)}$$

und die trigonometrischen Beziehungen (Sinus, Kosinus, Tangens):

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse},\ \cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{Ankathete}{Hypotenuse},\ \tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} \text{ (Winkel α)}$$

$$\sin\beta = \frac{b}{c} = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse}, \ \cos\beta = \frac{a}{c} = \frac{Ankathete}{Hypotenuse}, \ \tan\beta = \frac{b}{a} = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} \text{ (Winkel } \beta)$$

$$\sin\alpha = \cos\beta, \ \cos\alpha = \sin\beta, \ \tan\alpha = \frac{1}{\tan\beta}, \ \tan\beta = \frac{1}{\tan\alpha}.$$

Mit den Dreieckswinkeln α, β und γ = 90° gelten noch die Beziehungen:

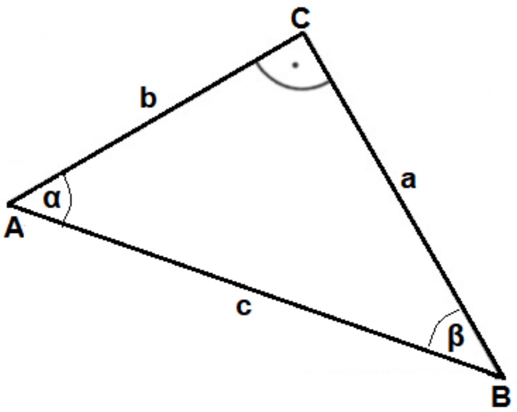
$$\alpha + \beta = 90°, \alpha = 90° - \beta, \beta = 90° - \alpha.$$

Mit den Seiten a, b, c des Dreiecks errechnet sich dessen Umfang:

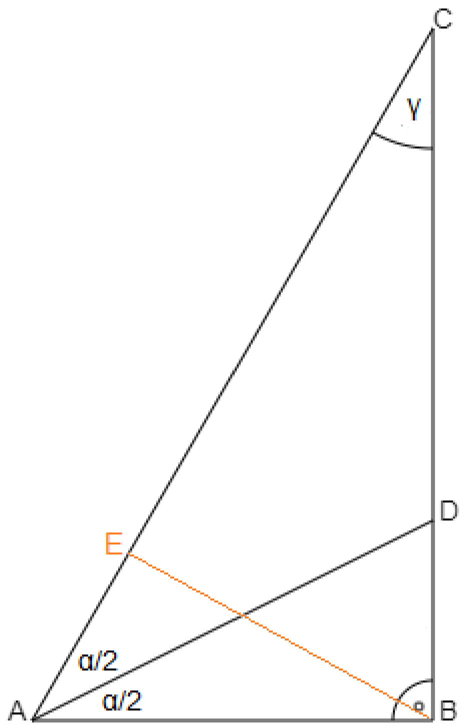
$$u = a + b + c.$$

Mit den Katheten a, b ermittelt sich der Flächeninhalt der Dreiecksfläche:

$$A = \frac{1}{2}ab.$$



II. Wir tragen zunächst die zwei Winkel α/2 und den Abstand $\overline{BE}$ zwischen der Ecke und der Seite $\overline{AD}$ im Dreieck ΔABC in die Zeichnung ein



und erhalten mit ΔABE und ΔBCE zwei rechtwinklige Dreiecke, die wir zur Berechnung des Abstandes nutzen können.

III. Im rechtwinkligen Dreieck ΔABC ist:

$\alpha = 90° – \gamma = 90° – 32{,}4° = 57{,}6°$.

Der halbe Winkel ist – wegen der Winkelhalbierenden $\overline{AD}$ – damit $\alpha/2 = 57{,}6°:2 = 28{,}8°$ groß.

IV. Im rechtwinkligen Dreieck ΔABD haben wir den Winkel $\alpha/2 = 28{,}8°$ und die Seitenlänge $\overline{BD}$ = 5,6 cm, so dass mit Hilfe des Tangens die Ankathete $\overline{AB}$ berechnet werden kann:

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\overline{BD}}{\overline{AB}} \Rightarrow \tan 28{,}8° = \frac{5{,}6}{\overline{AB}} \Rightarrow \overline{AB} = \frac{5{,}6}{\tan 28{,}8°} = 10{,}2 \text{ cm.}$$

V. Im schon angesprochenen rechtwinkligen Dreieck ΔABE mit dem rechten Winkel bei E (Abstand Ecke-Seite) ist nunmehr der Winkel $\alpha = 57{,}6°$ und die Hypotenuse $\overline{AB}$ = 10,2 cm vorhanden. Wir erhalten die Dreieckseite $\overline{BE}$ als Gegenkathete mit Hilfe des Sinus:

$$\sin\alpha = \frac{\overline{BE}}{\overline{AB}} \Rightarrow \sin 57{,}6° = \frac{\overline{BE}}{10{,}2} \Rightarrow \overline{BE} = 10{,}2 \cdot \sin 57{,}6° = 8{,}6 \text{ cm.}$$

Die Seite $\overline{BE}$ = 8,6 cm gibt dann den Abstand der Ecke B zur Seite $\overline{AD}$ im Dreieck ABC an.

www.michael-buhlmann.de / 02.2019 / Aufgabe 782