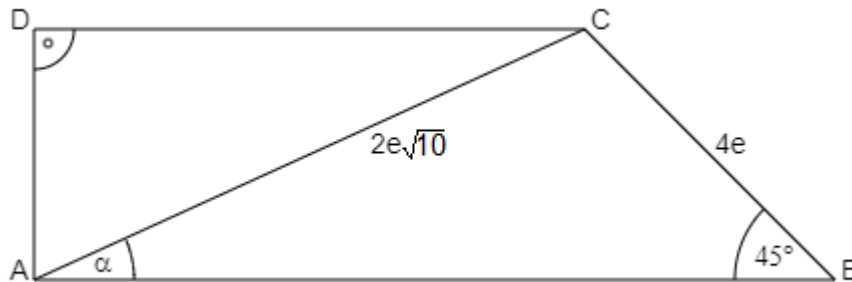


Mathematikaufgaben

> Geometrie/Trigonometrie

> Trapez (exakte Berechnung)

Aufgabe: Im rechtwinkligen Trapez ABCD gilt: $\overline{AC} = 2e\sqrt{10}$, $\overline{BC} = 4e$.



Zeige ohne Verwendung gerundeter Werte, dass für den Winkel α die folgende Beziehung gilt:

$$\tan \alpha = \frac{1}{2}.$$

Lösung: I. In einem rechtwinkligen Dreieck $\triangle ABC$ mit den Seiten a , b , c und den Winkeln α , β , γ bei $\gamma = 90^\circ$ heißen a und b Katheten, c Hypotenuse. Die Kathete, die gegenüber einem Winkel α oder β liegt, heißt Gegenkathete (bei Winkel α Seite a , bei Winkel β Seite b), die Kathete, die an einem Winkel α oder β liegt, heißt Ankathete (bei Winkel α Seite b , bei Winkel β Seite a). Dann gelten der Satz des Pythagoras:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ (Hypotenuse)}$$

$$a^2 = c^2 - b^2 \Rightarrow a = \sqrt{c^2 - b^2} \text{ (Kathete)}$$

$$b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2} \text{ (Kathete)}$$

und die trigonometrischen Beziehungen (Sinus, Kosinus, Tangens):

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \text{ (Winkel } \alpha \text{)}$$

$$\sin \beta = \frac{b}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \cos \beta = \frac{a}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \tan \beta = \frac{b}{a} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \text{ (Winkel } \beta \text{)}$$

$$\sin \alpha = \cos \beta, \quad \cos \alpha = \sin \beta, \quad \tan \alpha = \frac{1}{\tan \beta}, \quad \tan \beta = \frac{1}{\tan \alpha}.$$

Mit den Dreieckswinkeln α , β und $\gamma = 90^\circ$ gelten noch die Beziehungen:

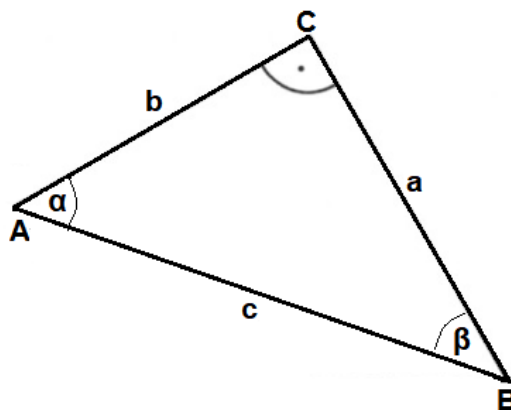
$$\alpha + \beta = 90^\circ, \quad \alpha = 90^\circ - \beta, \quad \beta = 90^\circ - \alpha.$$

Mit den Seiten a , b , c des Dreiecks errechnet sich dessen Umfang:

$$u = a + b + c.$$

Mit den Katheten a , b ermittelt sich der Flächeninhalt der Dreiecksfläche:

$$A = \frac{1}{2} ab.$$



II. Die Formvariable e steht in der Geometrie und Trigonometrie für eine beliebige reelle Zahl, die die Grundlage einer geometrisch-trigonometrischen und daher exakten Formel bildet. Seitenlängen sind dabei Vielfaches von e , Flächen Vielfaches von e^2 . Bei Anwendung von Trigonometrie und Satz des Pythagoras treten dann Ausdrücke vom Typ

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = \sqrt{a^2} = a \text{ (Wurzel und Quadrat)}$$

$$\sqrt{ae^2} = e\sqrt{a} = ne\sqrt{a_1} \text{ (teilweises Wurzelziehen)}$$

und

$$\frac{e}{\sqrt{a}} = \frac{e}{a} \sqrt{a} \text{ (Ganzrationalmachen des Nenners)}$$

auf. Im Bereich der trigonometrischen Funktionen sind die exakten Werte von Sinus, Kosinus und Tangens für spezielle Winkel wichtig:

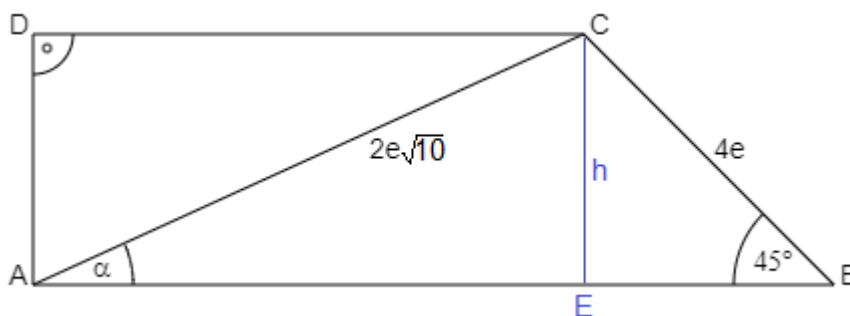
$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \quad \sin 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \quad \sin 60^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}, \quad \cos 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \quad \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \tan 45^\circ = 1, \quad \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

Zu beachten ist auch, dass ein 45° -Winkel in einem rechtwinkligen Dreieck auf ein gleichschenkliges Dreieck hinweist, ein 30° - oder 60° -Winkel auf ein gleichseitiges Dreieck, dessen eine Hälfte das Dreieck mit dem 30° - oder 60° -Winkel ist.

III. Wir zeichnen in das Trapez ABCD die Höhe $h = \overline{CE}$ ein, so dass ein rechtwinkliges Dreieck $\triangle BCE$ erkennbar wird:



IV. Das rechtwinklige Dreieck $\triangle BCE$ ist wegen des Winkels $\beta = 45^\circ$ gleichschenkelig. Für die Trapezhöhe h gilt nach dem Satz des Pythagoras:

$$h^2 + h^2 = \overline{BC}^2 \Rightarrow 2h^2 = \overline{BC}^2 \Rightarrow h^2 = \frac{\overline{BC}^2}{2} = \frac{(4e)^2}{2} = \frac{16e^2}{2} = 8e^2 \Rightarrow h = \sqrt{8e^2} = e\sqrt{8} = 2e\sqrt{2}.$$

V. Die Höhe h ist Kathete im rechtwinkligen Dreieck $\triangle AEC$, dessen Winkel auch α ist. Um den Tangens des Winkels zu bestimmen, benötigen wir neben der Gegenkathete h noch die Ankathete \overline{AE} . Die Berechnung von \overline{AE} erfolgt wieder nach dem Satz des Pythagoras:

$$\overline{AE}^2 = \overline{AC}^2 - h^2 = (2e\sqrt{10})^2 - (2e\sqrt{2})^2 = 4e^2 \cdot 10 - 4e^2 \cdot 2 = 40e^2 - 8e^2 = 32e^2$$

$$\Rightarrow \overline{AE} = \sqrt{32e^2} = e\sqrt{32} = 4e\sqrt{2}.$$

VI. Wir können nun den Tangens des Winkels α bestimmen. Es gilt:

$$\tan \alpha = \frac{\overline{CE}}{\overline{AE}} = \frac{h}{\overline{AE}} = \frac{2e\sqrt{2}}{4e\sqrt{2}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

was zu zeigen war.