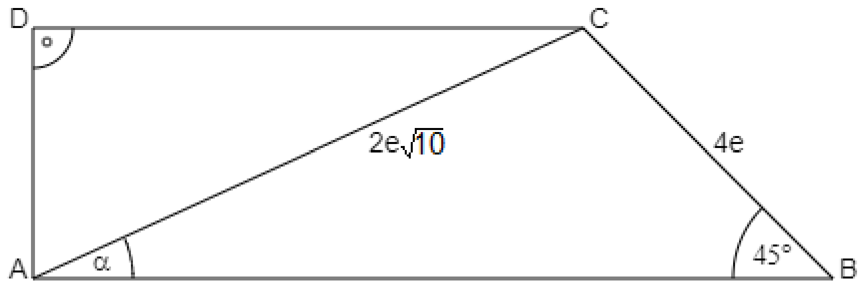
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Geometrie/Trigonometrie
> Trapez (exakte Berechnung)

Aufgabe: Im rechtwinkligen Trapez ABCD gilt: $\overline{AC} = 2e\sqrt{10}$, $\overline{BC}$ = 4e.



Zeige ohne Verwendung gerundeter Werte, dass für den Winkel α die folgende Beziehung gilt:

$$\tan\alpha = \frac{1}{2}.$$

Lösung: I. In einem rechtwinkligen Dreieck ΔABC mit den Seiten a, b, c und den Winkeln α, β, γ bei γ = 90° heißen a und b Katheten, c Hypotenuse. Die Kathete, die gegenüber einem Winkel α oder β liegt, heißt Gegenkathete (bei Winkel α Seite a, bei Winkel β Seite b), die Kathete, die an einem Winkel α oder β liegt, heißt Ankathete (bei Winkel α Seite b, bei Winkel β Seite a). Dann gelten der Satz des Pythagoras:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ (Hypotenuse)}$$
$$a^2 = c^2 - b^2 \Rightarrow a = \sqrt{c^2 - b^2} \text{ (Kathete)}$$
$$b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow c = \sqrt{c^2 - a^2} \text{ (Kathete)}$$

und die trigonometrischen Beziehungen (Sinus, Kosinus, Tangens):

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse},\ \cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{Ankathete}{Hypotenuse},\ \tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} \text{ (Winkel α)}$$
$$\sin\beta = \frac{b}{c} = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse},\ \cos\beta = \frac{a}{c} = \frac{Ankathete}{Hypotenuse},\ \tan\beta = \frac{b}{a} = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} \text{ (Winkel β)}$$
$$\sin\alpha = \cos\beta,\ \cos\alpha = \sin\beta,\ \tan\alpha = \frac{1}{\tan\beta},\ \tan\beta = \frac{1}{\tan\alpha}.$$

Mit den Dreieckswinkeln α, β und γ = 90° gelten noch die Beziehungen:

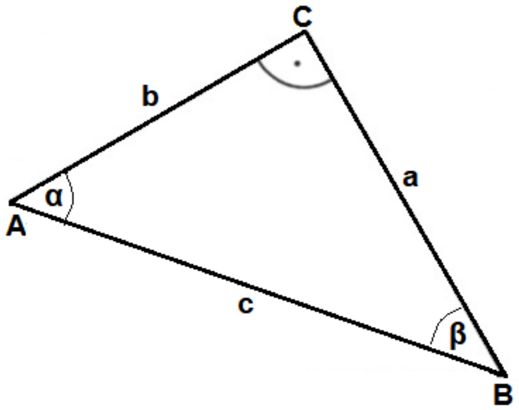
α + β = 90°, α = 90° – β, β = 90° – α.

Mit den Seiten a, b, c des Dreiecks errechnet sich dessen Umfang:

u = a + b + c.

Mit den Katheten a, b ermittelt sich der Flächeninhalt der Dreiecksfläche:

$$A = \frac{1}{2}ab.$$



II. Die Formvariable e steht in der Geometrie und Trigonometrie für eine beliebige reelle Zahl, die die Grundlage einer geometrisch-trigonometrischen und daher exakten Formel bildet. Seitenlängen sind dabei Vielfaches von e, Flächen Vielfaches von e^2. Bei Anwendung von Trigonometrie und Satz des Pythagoras treten dann Ausdrücke vom Typ

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{a} = \sqrt{a}^2 = a \text{ (Wurzel und Quadrat)}$$
$$\sqrt{ae^2} = e\sqrt{a} = ne\sqrt{a_1} \text{ (teilweises Wurzelziehen)}$$

und

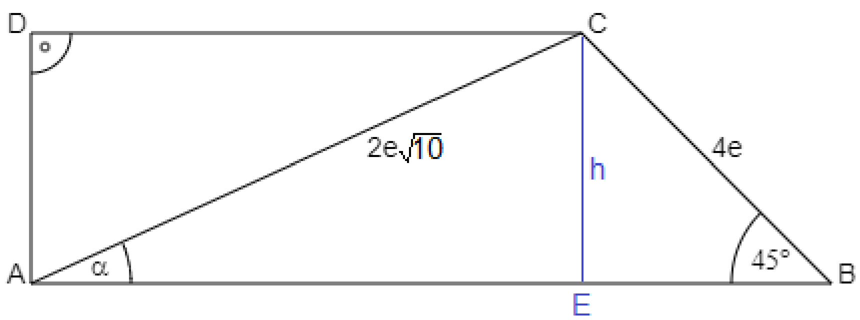
$$\frac{e}{\sqrt{a}} = \frac{e}{a}\sqrt{a} \text{ (Ganzrationalmachen des Nenners)}$$

auf. Im Bereich der trigonometrischen Funktionen sind die exakten Werte von Sinus, Kosinus und Tangens für spezielle Winkel wichtig:

$$\sin 30° = \frac{1}{2},\ \sin 45° = \frac{1}{2}\sqrt{2},\ \sin 60° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$
$$\cos 30° = \frac{1}{2}\sqrt{3},\ \cos 45° = \frac{1}{2}\sqrt{2},\ \cos 60° = \frac{1}{2}$$
$$\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},\ \tan 45° = 1,\ \tan 60° = \sqrt{3}$$

Zu beachten ist auch, dass ein 45°-Winkel in einem rechtwinkligen Dreieck auf ein gleichschenkliges Dreieck hinweist, ein 30°- oder 60°-Winkel auf ein gleichseitiges Dreieck, dessen eine Hälfte das Dreieck mit dem 30°- oder 60°-Winkel ist.

III. Wir zeichnen in das Trapez ABCD die Höhe h = $\overline{CE}$ ein, so dass ein rechtwinkliges Dreieck ΔBCE erkennbar wird:



IV. Das rechtwinklige Dreieck ΔBCE ist wegen des Winkels β = 45° gleichschenklig. Für die Trapezhöhe h gilt nach dem Satz des Pythagoras:

$$h^2 + h^2 = \overline{BC}^2 \Rightarrow 2h^2 = \overline{BC}^2 \Rightarrow h^2 = \frac{\overline{BC}^2}{2} = \frac{(4e)^2}{2} = \frac{16e^2}{2} = 8e^2 \Rightarrow h = \sqrt{8e^2} = e\sqrt{8} = 2e\sqrt{2}\,.$$

V. Die Höhe h ist Kathete im rechtwinkligen Dreieck ΔAEC, dessen Winkel auch α ist. Um den Tangens des Winkels zu bestimmen, benötigen wir neben der Gegenkathete h noch die Ankathete $\overline{AE}$. Die Berechnung von $\overline{AE}$ erfolgt wieder nach dem Satz des Pythagoras:

$$\overline{AE}^2 = \overline{AC}^2 - h^2 = (2e\sqrt{10})^2 - (2e\sqrt{2})^2 = 4e^2 \cdot 10 - 4e^2 \cdot 2 = 40e^2 - 8e^2 = 32e^2$$

$$\Rightarrow \overline{AE} = \sqrt{32e^2} = e\sqrt{32} = 4e\sqrt{2}.$$

VI. Wir können nun den Tangens des Winkels α bestimmen. Es gilt:

$$\tan\alpha = \frac{\overline{CE}}{\overline{AE}} = \frac{h}{\overline{AE}} = \frac{2e\sqrt{2}}{4e\sqrt{2}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

was zu zeigen war.

www.michael-buhlmann.de / 02.2019 / Aufgabe 785