

Mathematikaufgaben

> Geometrie/Trigonometrie

> Rechtwinkliges Dreieck

Aufgabe: Im rechtwinkligen Dreieck $\triangle ABC$ sind die Kathete $a = 4,5$ cm und der Winkel $\alpha = 72,8^\circ$ gegeben ($\gamma = 90^\circ$). Berechne die fehlenden Größen, den Umfang und den Flächeninhalt des Dreiecks.

Lösung: I. In einem rechtwinkligen Dreieck $\triangle ABC$ mit den Seiten a, b, c und den Winkeln α, β, γ bei $\gamma = 90^\circ$ heißen a und b Katheten, c Hypotenuse. Die Kathete, die gegenüber einem Winkel α oder β liegt, heißt Gegenkathete (bei Winkel α Seite a , bei Winkel β Seite b), die Kathete, die an einem Winkel α oder β liegt, heißt Ankathete (bei Winkel α Seite b , bei Winkel β Seite a). Dann gelten der Satz des Pythagoras:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ (Hypotenuse)}$$

$$a^2 = c^2 - b^2 \Rightarrow a = \sqrt{c^2 - b^2} \text{ (Kathete)}$$

$$b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2} \text{ (Kathete)}$$

und die trigonometrischen Beziehungen (Sinus, Kosinus, Tangens):

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \text{ (Winkel } \alpha \text{)}$$

$$\sin \beta = \frac{b}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \cos \beta = \frac{a}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \tan \beta = \frac{b}{a} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \text{ (Winkel } \beta \text{)}$$

$$\sin \alpha = \cos \beta, \quad \cos \alpha = \sin \beta, \quad \tan \alpha = \frac{1}{\tan \beta}, \quad \tan \beta = \frac{1}{\tan \alpha}.$$

Mit den Dreieckswinkeln α, β und $\gamma = 90^\circ$ gelten noch die Beziehungen:

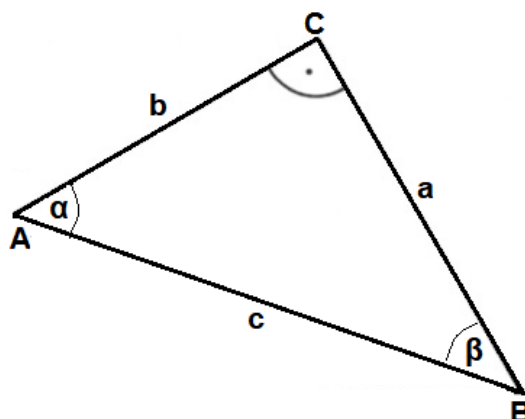
$$\alpha + \beta = 90^\circ, \quad \alpha = 90^\circ - \beta, \quad \beta = 90^\circ - \alpha.$$

Mit den Seiten a, b, c des Dreiecks errechnet sich dessen Umfang:

$$u = a + b + c.$$

Mit den Katheten a, b ermittelt sich der Flächeninhalt der Dreiecksfläche:

$$A = \frac{1}{2} ab.$$



II. Eine weitere Seite im Dreieck $\triangle ABC$ lässt sich mit dem Sinus oder dem Tangens berechnen. Wir entscheiden uns für den Tangens und haben mit der Gegenkathete $a = 4,5$ cm und dem Winkel $\alpha = 72,8^\circ$ die Ankathete b zu berechnen:

$$\tan \alpha = \frac{a}{b} \Rightarrow \tan 72,8^\circ = \frac{4,5}{b} \Rightarrow b = \frac{4,5}{\tan 72,8^\circ} = \frac{4,5}{3,23} = 1,39 \approx 1,4 \text{ cm.}$$

Nach dem Satz des Pythagoras folgt für die Hypotenuse des Dreiecks:

$$c^2 = a^2 + b^2 = 4,5^2 + 1,4^2 = 22,21 \Rightarrow c = \sqrt{22,21} = 4,71 \approx 4,7 \text{ cm.}$$

Schließlich gilt für den Winkel β (letztlich auf Grund der Winkelsumme von 180° im Dreieck bei rechtem Winkel $\gamma = 90^\circ$):

$$\beta = 90^\circ - 72,8^\circ = 17,2^\circ.$$

III. Für den Umfang des Dreiecks $\triangle ABC$ gilt:

$$u = a + b + c = 4,5 + 1,4 + 4,7 = 10,6 \text{ cm.}$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle ABC$ errechnet sich mit den Katheten $a = 4,5$ cm, $b = 1,4$ cm als:

$$A = \frac{1}{2} \cdot 4,5 \cdot 1,4 = 3,15 \approx 3,2 \text{ cm}^2.$$

IV. Zeichnung:

