

# Mathematikaufgaben

## > Geometrie/Trigonometrie

### > Rechtwinkliges Dreieck

---

**Aufgabe:** Im rechtwinkligen Dreieck  $\triangle ABC$  sind die Kathete  $a = 4,5$  cm und der Winkel  $\alpha = 72,8^\circ$  gegeben ( $\gamma = 90^\circ$ ). Berechne die fehlenden Größen, den Umfang und den Flächeninhalt des Dreiecks.

**Lösung:** I. In einem rechtwinkligen Dreieck  $\triangle ABC$  mit den Seiten  $a, b, c$  und den Winkeln  $\alpha, \beta, \gamma$  bei  $\gamma = 90^\circ$  heißen  $a$  und  $b$  Katheten,  $c$  Hypotenuse. Die Kathete, die gegenüber einem Winkel  $\alpha$  oder  $\beta$  liegt, heißt Gegenkathete (bei Winkel  $\alpha$  Seite  $a$ , bei Winkel  $\beta$  Seite  $b$ ), die Kathete, die an einem Winkel  $\alpha$  oder  $\beta$  liegt, heißt Ankathete (bei Winkel  $\alpha$  Seite  $b$ , bei Winkel  $\beta$  Seite  $a$ ). Dann gelten der Satz des Pythagoras:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (\text{Hypotenuse})$$

$$a^2 = c^2 - b^2 \Rightarrow a = \sqrt{c^2 - b^2} \quad (\text{Kathete})$$

$$b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2} \quad (\text{Kathete})$$

und die trigonometrischen Beziehungen (Sinus, Kosinus, Tangens):

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \quad (\text{Winkel } \alpha)$$

$$\sin \beta = \frac{b}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \cos \beta = \frac{a}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \tan \beta = \frac{b}{a} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \quad (\text{Winkel } \beta)$$

$$\sin \alpha = \cos \beta, \quad \cos \alpha = \sin \beta, \quad \tan \alpha = \frac{1}{\tan \beta}, \quad \tan \beta = \frac{1}{\tan \alpha}.$$

Mit den Dreieckswinkeln  $\alpha, \beta$  und  $\gamma = 90^\circ$  gelten noch die Beziehungen:

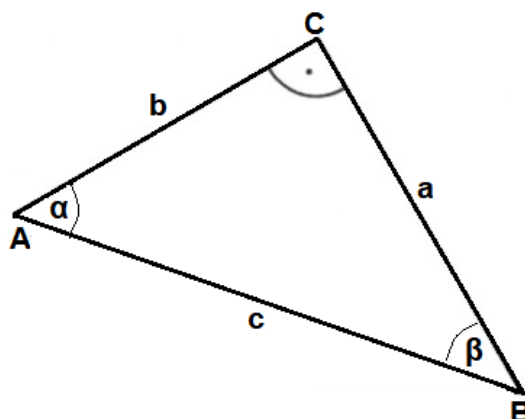
$$\alpha + \beta = 90^\circ, \quad \alpha = 90^\circ - \beta, \quad \beta = 90^\circ - \alpha.$$

Mit den Seiten  $a, b, c$  des Dreiecks errechnet sich dessen Umfang:

$$u = a + b + c.$$

Mit den Katheten  $a, b$  ermittelt sich der Flächeninhalt der Dreiecksfläche:

$$A = \frac{1}{2} ab.$$



II. Eine weitere Seite im Dreieck  $\triangle ABC$  lässt sich mit dem Sinus oder dem Tangens berechnen. Wir entscheiden uns für den Tangens und haben mit der Gegenkathete  $a = 4,5$  cm und dem Winkel  $\alpha = 72,8^\circ$  die Ankathete  $b$  zu berechnen:

$$\tan \alpha = \frac{a}{b} \Rightarrow \tan 72,8^\circ = \frac{4,5}{b} \Rightarrow b = \frac{4,5}{\tan 72,8^\circ} = \frac{4,5}{3,23} = 1,39 \approx 1,4 \text{ cm.}$$

Nach dem Satz des Pythagoras folgt für die Hypotenuse des Dreiecks:

$$c^2 = a^2 + b^2 = 4,5^2 + 1,4^2 = 22,21 \Rightarrow c = \sqrt{22,21} = 4,71 \approx 4,7 \text{ cm.}$$

Schließlich gilt für den Winkel  $\beta$  (letztlich auf Grund der Winkelsumme von  $180^\circ$  im Dreieck bei rechtem Winkel  $\gamma = 90^\circ$ ):

$$\beta = 90^\circ - 72,8^\circ = 17,2^\circ.$$

III. Für den Umfang des Dreiecks  $\triangle ABC$  gilt:

$$u = a + b + c = 4,5 + 1,4 + 4,7 = 10,6 \text{ cm.}$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks  $\triangle ABC$  errechnet sich mit den Katheten  $a = 4,5$  cm,  $b = 1,4$  cm als:

$$A = \frac{1}{2} \cdot 4,5 \cdot 1,4 = 3,15 \approx 3,2 \text{ cm}^2.$$

IV. Zeichnung:

