Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Geometrie/Trigonometrie
> Rechtwinkliges Dreieck

Aufgabe: Im rechtwinkligen Dreieck ΔABC sind die Hypotenuse c = 12,2 cm und der Winkel β = 52,3° gegeben (γ = 90°). Berechne die fehlenden Größen, den Umfang und den Flächeninhalt des Dreiecks.

Lösung: I. In einem <u>rechtwinkligen Dreieck</u> ΔABC mit den Seiten a, b, c und den Winkeln α, β, γ bei γ = 90° heißen a und b Katheten, c Hypotenuse. Die Kathete, die gegenüber einem Winkel α oder β liegt, heißt Gegenkathete (bei Winkel α Seite a, bei Winkel β Seite b), die Kathete, die an einem Winkel α oder β liegt, heißt Ankathete (bei Winkel α Seite b, bei Winkel β Seite a). Dann gelten der Satz des Pythagoras:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ (Hypotenuse)}$$
$$a^2 = c^2 - b^2 \Rightarrow a = \sqrt{c^2 - b^2} \text{ (Kathete)}$$
$$b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2} \text{ (Kathete)}$$

und die trigonometrischen Beziehungen (Sinus, Kosinus, Tangens):

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse},\ \cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{Ankathete}{Hypotenuse},\ \tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} \text{ (Winkel α)}$$
$$\sin\beta = \frac{b}{c} = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse},\ \cos\beta = \frac{a}{c} = \frac{Ankathete}{Hypotenuse},\ \tan\beta = \frac{b}{a} = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} \text{ (Winkel β)}$$
$$\sin\alpha = \cos\beta,\ \cos\alpha = \sin\beta,\ \tan\alpha = \frac{1}{\tan\beta},\ \tan\beta = \frac{1}{\tan\alpha}.$$

Mit den Dreieckswinkeln α, β und γ = 90° gelten noch die Beziehungen:

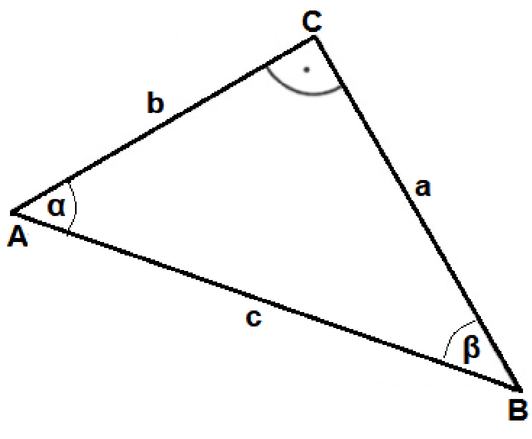
α + β = 90°, α = 90° – β, β = 90° – α.

Mit den Seiten a, b, c des Dreiecks errechnet sich dessen Umfang:

u = a + b + c.

Mit den Katheten a, b ermittelt sich der Flächeninhalt der Dreiecksfläche:

$$A = \frac{1}{2}ab.$$



II. Eine weitere Seite im Dreieck ΔABC lässt sich mit dem Sinus oder dem Kosinus berechnen. Wir entscheiden uns für den Sinus und haben mit der Hypotenuse c = 12,2 cm und dem Winkel β = 52,3° die <u>Gegenkathete</u> b zu berechnen:

$$\sin\beta = \frac{b}{c} \Rightarrow \sin 52{,}3° = \frac{b}{12{,}2} \Rightarrow b = 12{,}2 \cdot \sin 52{,}3° = 9{,}65 \approx 9{,}7 \text{ cm.}$$

Nach dem Satz des Pythagoras folgt für die <u>Ankathete</u> a des Dreiecks:

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow a^2 = c^2 - b^2 = 12{,}2^2 - 9{,}7^2 = 54{,}75 \Rightarrow a = \sqrt{54{,}75} = 7{,}4$ cm.

Schließlich gilt für den <u>Winkel</u> α (letztlich auf Grund der Winkelsumme von 180° im Dreieck bei rechtem Winkel γ = 90°):

α = 90°-52,3° = 37,7°.

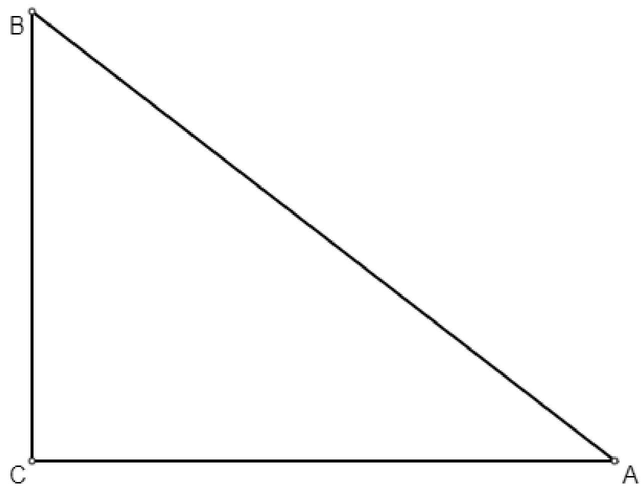
III. Für den <u>Umfang</u> des Dreiecks ΔABC gilt:

u = a + b + c = 7,4 + 9,7 + 12,2 = 29,3 cm.

Der <u>Flächeninhalt</u> des Dreiecks ΔABC errechnet sich mit den Katheten a = 7,4 cm, b = 9,7 cm als:

$$A = \frac{1}{2} \cdot 7{,}4 \cdot 9{,}7 = 35{,}89 \approx 35{,}9 \text{ cm}^2.$$

IV. <u>Zeichnung</u>:



www.michael-buhlmann.de / 09.2020 / Aufgabe 1110