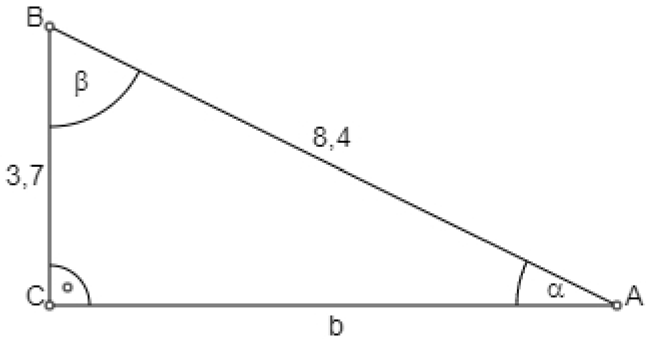
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Geometrie/Trigonometrie
> Rechtwinkliges Dreieck

Aufgabe: Im rechtwinkligen Dreieck ΔABC (γ = 90°) sind die fehlenden Größen, der Umfang und der Flächeninhalt zu berechnen.



(Größen in Zentimetern)

Lösung: I. In einem rechtwinkligen Dreieck ΔABC mit den Seiten a, b, c und den Winkeln α, β, γ bei γ = 90° heißen a und b Katheten, c Hypotenuse. Die Kathete, die gegenüber einem Winkel α oder β liegt, heißt Gegenkathete (bei Winkel α Seite a, bei Winkel β Seite b), die Kathete, die an einem Winkel α oder β liegt, heißt Ankathete (bei Winkel α Seite b, bei Winkel β Seite a). Dann gelten der Satz des Pythagoras:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ (Hypotenuse)}$$

$$a^2 = c^2 - b^2 \Rightarrow a = \sqrt{c^2 - b^2} \text{ (Kathete)}$$

$$b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow c = \sqrt{c^2 - a^2} \text{ (Kathete)}$$

und die trigonometrischen Beziehungen (Sinus, Kosinus, Tangens):

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse},\ \cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{Ankathete}{Hypotenuse},\ \tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} \text{ (Winkel α)}$$

$$\sin\beta = \frac{b}{c} = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse},\ \cos\beta = \frac{a}{c} = \frac{Ankathete}{Hypotenuse},\ \tan\beta = \frac{b}{a} = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} \text{ (Winkel β)}$$

$$\sin\alpha = \cos\beta,\ \cos\alpha = \sin\beta,\ \tan\alpha = \frac{1}{\tan\beta},\ \tan\beta = \frac{1}{\tan\alpha}.$$

Mit den Dreieckswinkeln α, β und γ = 90° gelten noch die Beziehungen:

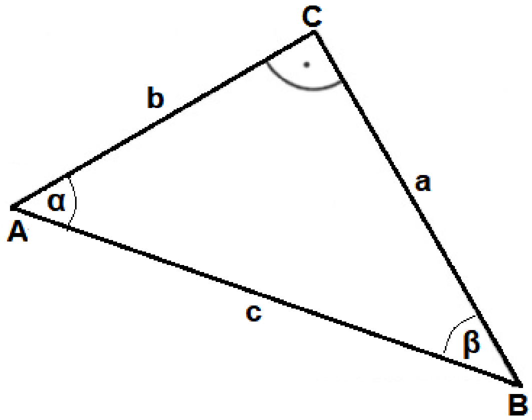
α + β = 90°, α = 90° – β, β = 90° – α.

Mit den Seiten a, b, c des Dreiecks errechnet sich dessen Umfang:

u = a + b + c.

Mit den Katheten a, b ermittelt sich der Flächeninhalt der Dreiecksfläche:

$$A = \frac{1}{2}ab.$$



II. Im Dreieck ΔABC sind laut Zeichnung die Kathete a = 3,7 cm und die Hypotenuse c = 8,4 cm gegeben. Gemäß dem Satz des Pythagoras folgt für die fehlende Kathete b des Dreiecks:

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 = 8{,}4^2 - 3{,}7^2 = 56{,}87 \Rightarrow b = \sqrt{56{,}87} = 7{,}54 \approx 7{,}5$ cm.

Z.B. mit dem Sinus berechnen wir den Winkel α mit Gegenkathete a = 3,7 cm und Hypotenuse c = 8,4 cm:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{3{,}7}{8{,}4} = 0{,}4405 \Rightarrow \alpha = \sin^{-1}(0{,}4405) = 26{,}13° \approx 26{,}1°.$$

Schließlich gilt für den Winkel β (letztlich auf Grund der Winkelsumme von 180° im Dreieck bei rechtem Winkel γ = 90°):

β = 90°–26,1° = 63,9°.

III. Für den Umfang des Dreiecks ΔABC gilt:

u = a + b + c = 3,7 + 7,5 + 8,4 = 19,6 cm.

Der Flächeninhalt des Dreiecks ΔABC errechnet sich mit den Katheten a = 7,4 cm, b = 9,7 cm als:

$$A = \frac{1}{2} \cdot 3{,}7 \cdot 7{,}5 = 13{,}875 \approx 13{,}9 \text{ cm}^2.$$

www.michael-buhlmann.de / 09.2020 / Aufgabe 1111