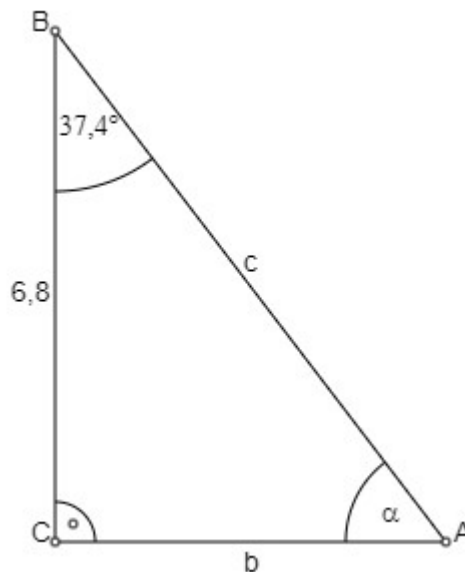


Mathematikaufgaben

> Geometrie/Trigonometrie

> Rechtwinkliges Dreieck

Aufgabe: Im rechtwinkligen Dreieck $\triangle ABC$ ($\gamma = 90^\circ$) sind die fehlenden Größen, der Umfang und der Flächeninhalt zu berechnen.



(Größen in Zentimetern)

Lösung: I. In einem rechtwinkligen Dreieck $\triangle ABC$ mit den Seiten a, b, c und den Winkeln α, β, γ bei $\gamma = 90^\circ$ heißen a und b Katheten, c Hypotenuse. Die Kathete, die gegenüber einem Winkel α oder β liegt, heißt Gegenkathete (bei Winkel α Seite a , bei Winkel β Seite b), die Kathete, die an einem Winkel α oder β liegt, heißt Ankathete (bei Winkel α Seite b , bei Winkel β Seite a). Dann gelten der Satz des Pythagoras:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (\text{Hypotenuse})$$

$$a^2 = c^2 - b^2 \Rightarrow a = \sqrt{c^2 - b^2} \quad (\text{Kathete})$$

$$b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2} \quad (\text{Kathete})$$

und die trigonometrischen Beziehungen (Sinus, Kosinus, Tangens):

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \quad (\text{Winkel } \alpha)$$

$$\sin \beta = \frac{b}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \cos \beta = \frac{a}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \tan \beta = \frac{b}{a} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \quad (\text{Winkel } \beta)$$

$$\sin \alpha = \cos \beta, \quad \cos \alpha = \sin \beta, \quad \tan \alpha = \frac{1}{\tan \beta}, \quad \tan \beta = \frac{1}{\tan \alpha}.$$

Mit den Dreieckswinkeln α, β und $\gamma = 90^\circ$ gelten noch die Beziehungen:

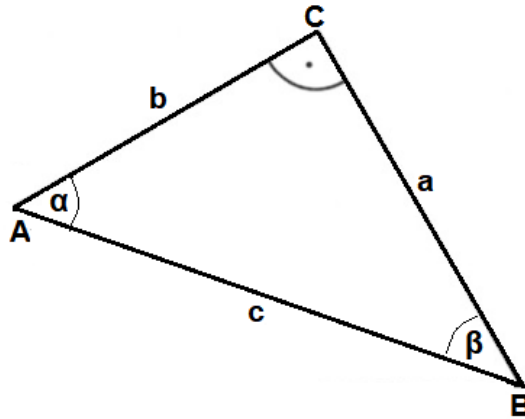
$$\alpha + \beta = 90^\circ, \quad \alpha = 90^\circ - \beta, \quad \beta = 90^\circ - \alpha.$$

Mit den Seiten a , b , c des Dreiecks errechnet sich dessen Umfang:

$$u = a + b + c.$$

Mit den Katheten a , b ermittelt sich der Flächeninhalt der Dreiecksfläche:

$$A = \frac{1}{2} ab.$$



II. Im Dreieck $\triangle ABC$ sind laut Zeichnung die Kathete $a = 6,8$ cm und der Winkel $\beta = 37,4^\circ$ gegeben. Z.B. mit dem Tangens berechnen wir zur Ankathete $a = 6,8$ cm mit dem Winkel $\beta = 37,4^\circ$ die Gegenkathete b :

$$\tan \beta = \frac{b}{a} \Rightarrow \tan 37,4^\circ = \frac{b}{6,8} \Rightarrow b = 6,8 \cdot \tan 37,4^\circ = 5,2 \text{ cm.}$$

Gemäß dem Satz des Pythagoras folgt für die noch fehlende Hypotenuse c des Dreiecks:

$$c^2 = a^2 + b^2 = 6,8^2 + 5,2^2 = 73,28 \Rightarrow c = \sqrt{73,28} = 8,56 \approx 8,6 \text{ cm.}$$

Schließlich gilt für den Winkel α (letztlich auf Grund der Winkelsumme von 180° im Dreieck bei rechtem Winkel $\gamma = 90^\circ$):

$$\alpha = 90^\circ - 37,4^\circ = 52,6^\circ.$$

III. Für den Umfang des Dreiecks $\triangle ABC$ gilt:

$$u = a + b + c = 6,8 + 5,2 + 8,6 = 20,6 \text{ cm.}$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle ABC$ errechnet sich mit den Katheten $a = 7,4$ cm, $b = 9,7$ cm als:

$$A = \frac{1}{2} \cdot 6,8 \cdot 5,2 = 17,68 \approx 17,7 \text{ cm}^2.$$