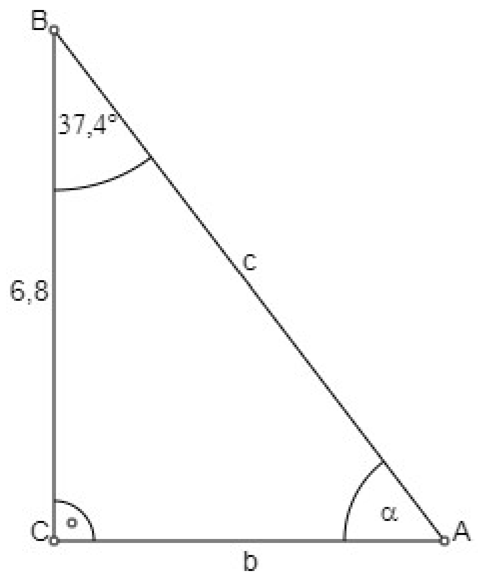
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Geometrie/Trigonometrie
> Rechtwinkliges Dreieck

Aufgabe: Im rechtwinkligen Dreieck ΔABC (γ = 90°) sind die fehlenden Größen, der Umfang und der Flächeninhalt zu berechnen.



(Größen in Zentimetern)

Lösung: I. In einem rechtwinkligen Dreieck ΔABC mit den Seiten a, b, c und den Winkeln α, β, γ bei γ = 90° heißen a und b Katheten, c Hypotenuse. Die Kathete, die gegenüber einem Winkel α oder β liegt, heißt Gegenkathete (bei Winkel α Seite a, bei Winkel β Seite b), die Kathete, die an einem Winkel α oder β liegt, heißt Ankathete (bei Winkel α Seite b, bei Winkel β Seite a). Dann gelten der Satz des Pythagoras:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ (Hypotenuse)}$$
$$a^2 = c^2 - b^2 \Rightarrow a = \sqrt{c^2 - b^2} \text{ (Kathete)}$$
$$b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2} \text{ (Kathete)}$$

und die trigonometrischen Beziehungen (Sinus, Kosinus, Tangens):

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse},\ \cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{Ankathete}{Hypotenuse},\ \tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} \text{ (Winkel α)}$$
$$\sin\beta = \frac{b}{c} = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse},\ \cos\beta = \frac{a}{c} = \frac{Ankathete}{Hypotenuse},\ \tan\beta = \frac{b}{a} = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} \text{ (Winkel β)}$$
$$\sin\alpha = \cos\beta,\ \cos\alpha = \sin\beta,\ \tan\alpha = \frac{1}{\tan\beta},\ \tan\beta = \frac{1}{\tan\alpha}.$$

Mit den Dreieckswinkeln α, β und γ = 90° gelten noch die Beziehungen:

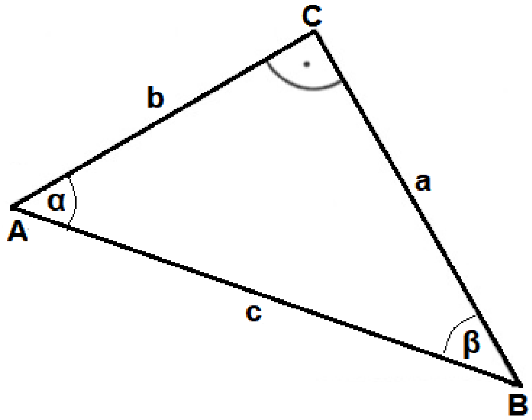
α + β = 90°, α = 90° – β, β = 90° – α.

Mit den Seiten a, b, c des Dreiecks errechnet sich dessen Umfang:

u = a + b + c.

Mit den Katheten a, b ermittelt sich der Flächeninhalt der Dreiecksfläche:

$$A = \frac{1}{2}ab\,.$$



II. Im Dreieck ΔABC sind laut Zeichnung die Kathete a = 6,8 cm und der Winkel β = 37,4° gegeben. Z.B. mit dem Tangens berechnen wir zur Ankathete a = 6,8 cm mit dem Winkel β = 37,4° die <u>Gegenkathete</u> b:

$$\tan\beta = \frac{b}{a} \Rightarrow \tan 37{,}4° = \frac{b}{6{,}8} \Rightarrow b = 6{,}8 \cdot \tan 37{,}4° = 5{,}2 \text{ cm.}$$

Gemäß dem Satz des Pythagoras folgt für die noch fehlende <u>Hypotenuse</u> c des Dreiecks:

$c^2 = a^2 + b^2 = 6{,}8^2 + 5{,}2^2 = 73{,}28$ => c = $\sqrt{56{,}87} = 8{,}56 \approx 8{,}6$ cm.

Schließlich gilt für den Winkel α (letztlich auf Grund der Winkelsumme von 180° im Dreieck bei rechtem Winkel γ = 90°):

α = 90°–37,4° = 52,6°.

III. Für den <u>Umfang</u> des Dreiecks ΔABC gilt:

u = a + b + c = 6,8 + 5,2 + 8,6 = 20,6 cm.

Der <u>Flächeninhalt</u> des Dreiecks ΔABC errechnet sich mit den Katheten a = 7,4 cm, b = 9,7 cm als:

$$A = \frac{1}{2} \cdot 6{,}8 \cdot 5{,}2 = 17{,}68 \approx 17{,}7 \text{ cm}^2.$$

www.michael-buhlmann.de / 09.2020 / Aufgabe 1112