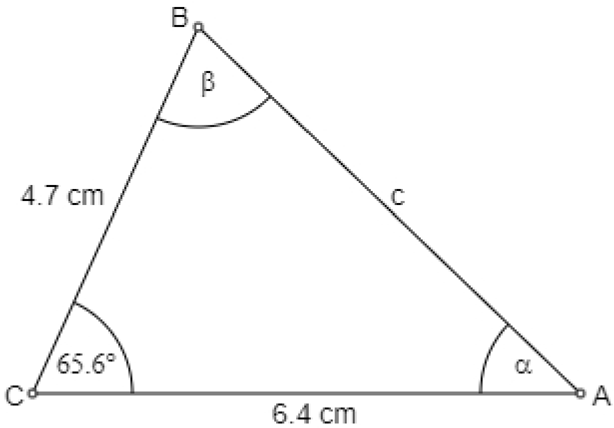
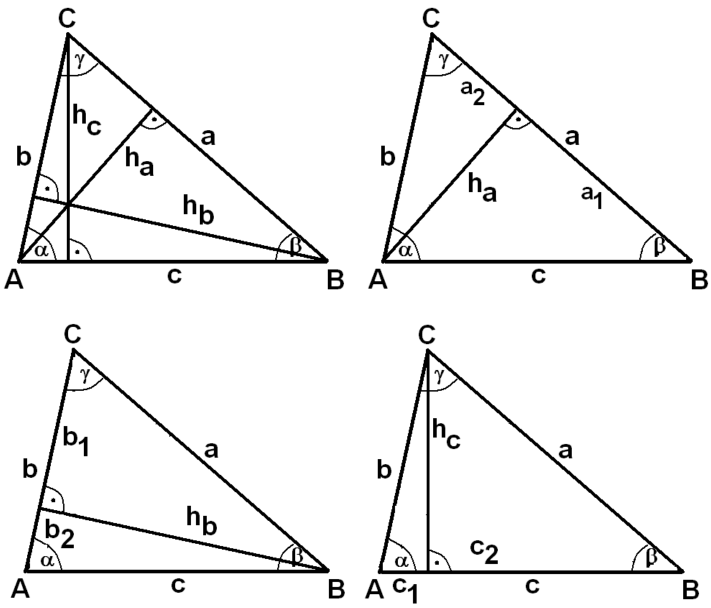
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Geometrie/Trigonometrie
> Allgemeines Dreieck

Aufgabe: Im allgemeinen Dreieck ΔABC sind die fehlenden Größen, der Umfang und der Flächeninhalt zu berechnen.



Lösung: I. In einem allgemeinen, spitzwinkligen Dreieck ΔABC mit den Seiten a, b, c und den Winkeln α, β, γ lassen sich Seiten und Winkel berechnen, indem bei vorgegebenen zwei Seiten und einem Winkel bzw. bei vorgegebenen zwei Winkeln und einer Seite das Dreieck so durch eine Höhe h_a, h_b, h_c in zwei rechtwinklige Dreiecke aufgeteilt wird, dass nicht der einzige vorgegebene Winkel oder die einzige vorgegebene Seite durch die Höhe geteilt wird.



Allgemeines Dreieck: Seiten a, b, c; Winkel α, β, γ, Höhen h_a, h_b, h_c

Der Satz des Pythagoras und die trigonometrischen Bezüge liefern dann in den rechtwinkligen Dreiecken, die durch Aufteilung des allgemeinen Dreiecks entstanden sind, die Beziehungen:

Höhe h_a: $a_1 + a_2 = a$, $a_1^2 + h_a^2 = c^2$, $a_2^2 + h_a^2 = b^2$,

$$\sin\beta = \frac{h_a}{c},\ \cos\beta = \frac{a_1}{c},\ \tan\beta = \frac{h_a}{a_1},\ \sin\gamma = \frac{h_a}{b},\ \cos\gamma = \frac{a_2}{b},\ \tan\gamma = \frac{h_a}{a_2}.$$

Höhe h_b: $b_1 + b_2 = b$, $b_1^2 + h_b^2 = a^2$, $b_2^2 + h_b^2 = c^2$,

$$\sin\alpha = \frac{h_b}{c},\ \cos\alpha = \frac{b_2}{c},\ \tan\alpha = \frac{h_b}{b_2},\ \sin\gamma = \frac{h_b}{a},\ \cos\gamma = \frac{b_1}{a},\ \tan\gamma = \frac{h_b}{b_1}.$$

Höhe h_c: $c_1 + c_2 = c$, $c_1^2 + h_c^2 = b^2$, $c_2^2 + h_c^2 = a^2$,

$$\sin\alpha = \frac{h_c}{b},\ \cos\alpha = \frac{c_1}{b},\ \tan\alpha = \frac{h_c}{c_1},\ \sin\beta = \frac{h_c}{a},\ \cos\beta = \frac{c_2}{a},\ \tan\beta = \frac{h_c}{c_2}.$$

Mit den Dreieckswinkeln α, β und γ gelten noch die Beziehungen:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°,\ \alpha = 180° - \beta - \gamma,\ \beta = 180° - \alpha - \gamma,\ \gamma = 180° - \alpha - \beta.$$

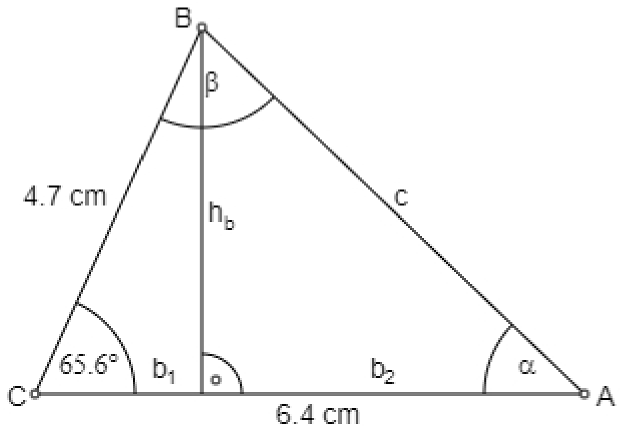
Mit den Seiten a, b, c des Dreiecks errechnet sich dessen Umfang:

$$u = a + b + c.$$

Mit der Grundseite und der Höhe ermittelt sich der Flächeninhalt der Dreiecksfläche:

$$A = \frac{1}{2}ah_a,\ A = \frac{1}{2}bh_b,\ A = \frac{1}{2}ch_c.$$

II. Es sind gemäß der Aufgabenstellung im allgemeinen Dreieck ΔABC zwei Seiten und ein Winkel gegeben. Damit ist laut nachstehender Zeichnung eine Höhe so einzutragen, dass diese nicht den einzigen vorgegebenen Seite γ = 65,6° teilt. Wir entscheiden uns für die Höhe h_b auf b und erhalten zwei rechtwinklige Dreiecke, in die das allgemeine Dreieck aufgeteilt wird; die <u>Aufteilung</u> betrifft auch die Dreieckseite b = 6,4 cm mit den Teilstrecken b_1 und b_2:



III. Wir betrachten das <u>linke rechtwinklige Dreieck</u> im Dreieck ΔABC und haben mit dem Winkel γ = 65,6°, der Ankathete b_1, der Gegenkathete h_b und der Hypotenuse a = 4,7 cm die fehlenden Seitenlängen wie folgt zu berechnen:

$$\sin\gamma = \frac{h_b}{a} \Rightarrow \sin 65{,}6° = \frac{h_b}{4{,}7} \Rightarrow h_b = 4{,}7 \cdot \sin 65{,}6° = 4{,}28 \approx 4{,}3 \text{ cm}$$

$$\cos\gamma = \frac{b_1}{a} \Rightarrow \cos 65{,}6° = \frac{b_1}{4{,}7} \Rightarrow b_1 = 4{,}7 \cdot \cos 65{,}6° = 1{,}94 \approx 1{,}9 \text{ cm.}$$

IV. Mit den Katheten h_b = 4,28 cm und $b_2 = b - b_1 = 6{,}4 - 1{,}94 = 4{,}46$ cm bestimmen wir im <u>rechten rechtwinkligen Dreieck</u> innerhalb des Dreiecks ΔABC nach dem Satz des Pythagoras die Hypotenuse c als:

$$c^2 = h_b^2 + b_2^2 \Rightarrow c^2 = 4{,}28^2 + 4{,}46^2 = 38{,}21 \Rightarrow c = \sqrt{38{,}21} = 6{,}18 \approx 6{,}2 \text{ cm.}$$

V. Damit sind alle Seiten bestimmt, und für den Umfang des Dreiecks ΔABC gilt damit:

u = a + b + c = 4,7 + 6,4 + 6,2 = 17,3 cm.

Der Flächeninhalt des Dreiecks ΔABC errechnet sich mit der Seite b und der Höhe h_b als:

$$A = \frac{1}{2} \cdot 6{,}4 \cdot 4{,}28 = 13{,}696 \approx 13{,}7 \text{ cm}^2.$$

VI. Der fehlende Winkel α ergibt sich aus:

$$\tan\alpha = \frac{h_b}{b_2} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{4{,}28}{4{,}46} \Rightarrow \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{4{,}28}{4{,}46}\right) = 43{,}82° \approx 43{,}8°.$$

Der Winkel β errechnet sich mit der Winkelsumme im allgemeinen Dreieck als:

β = 180° – α – γ = 180° – 43,8° – 65,6° = 70,6°.

Damit sind sämtliche Größen im allgemeinen Dreieck ΔABC bestimmt.

Lösung:

Seiten
a = 4.7 cm
b = 6.4 cm
c = 6.2 cm

Winkel
α = 43.8°
β = 70.6°
γ = 65.6°

Höhen
ha = 5.8 cm
hb = 4.3 cm
hc = 4.4 cm

Umfang u = 17.3 cm
Fläche A = 13.7 cm²

www.michael-buhlmann.de / 10.2020 / Aufgabe 1114