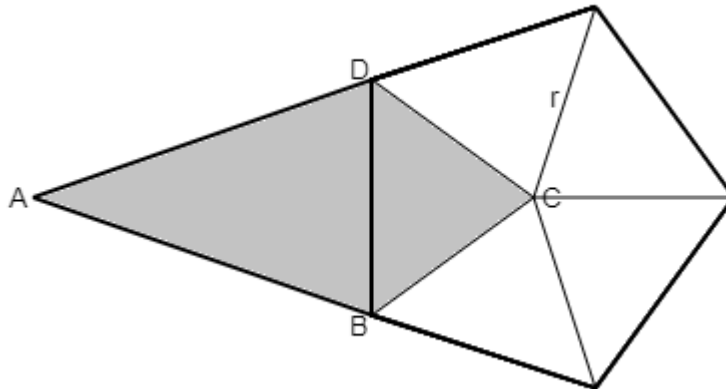


# Mathematikaufgaben

## > Geometrie/Trigonometrie

### > Regelmäßiges Fünfeck/Drache

**Aufgabe:** Ein regelmäßiges Fünfeck habe den Radius  $r = 5$  cm. Berechne den Flächeninhalt des Drachen ABCD.

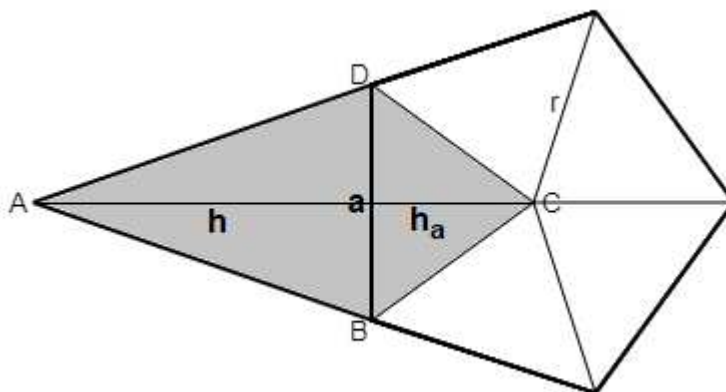


**Lösung:** I. Das regelmäßige Fünfeck besteht aus fünf gleichschenkligen Dreiecken mit Schenkel  $r = 5$  cm und (Fünfeckinnen-) Winkel  $\varphi = 360^\circ : 5 = 72^\circ$ .

II. Das gleichschenklige Dreieck  $\triangle BCD$  mit der Fünfeckseite  $a = \overline{BD}$  lässt sich durch die Seitenhöhe  $h_a$  in zwei rechtwinklige Dreiecke mit Winkel  $\varphi/2 = 36^\circ$  unterteilen,  $a$  und  $h_a$  lassen sich wie folgt berechnen:

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{a}{r} \Rightarrow \sin 36^\circ = \frac{a}{5} \Rightarrow \frac{a}{2} = 5 \cdot \sin 36^\circ = 2,94 \Rightarrow a = 5,88 \approx 5,9 \text{ cm}$$

$$\cos \frac{\varphi}{2} = \frac{h_a}{r} \Rightarrow \cos 36^\circ = \frac{h_a}{5} \Rightarrow h_a = 5 \cdot \cos 36^\circ = 4,045 \approx 4 \text{ cm.}$$



III. Im ebenso gleichschenkligen Dreieck  $\triangle ABD$  ist die Basisseite  $a = \overline{BD} = 5,9$  cm gegeben. Der

Basiswinkel  $\beta_1 = \delta_1$  an den Ecken B und D beträgt wegen des Fünfeckaußenwinkel  $180^\circ - \varphi$ :

$$\beta_1 = \delta_1 = 180^\circ - (180^\circ - \varphi) = \varphi = 72^\circ.$$

Basiswinkel und Basisseite bestimmen die Höhe  $h$  im Dreieck  $\triangle ABD$  als:

$$\tan \varphi = \frac{h}{\frac{a}{2}} \Rightarrow \tan 72^\circ = \frac{h}{5,88} \Rightarrow h = 5,88 \cdot \tan 72^\circ = 18,097 \approx 18,1 \text{ cm.}$$

IV. Der gesuchte Flächeninhalt des Drachens ABCD lässt sich über die Viereckdiagonalen  $e = \overline{AC}$ ,

$f = \overline{BD}$  bestimmen als  $A_{Dr} = \frac{1}{2}ef$ . Die Diagonalen errechnen sich mit:

$$e = h + h_a = 18,1 + 4 = 22,1 \text{ cm}$$

$$f = a = 5,9 \text{ cm.}$$

Der Flächeninhalt des Drachens ist damit:

$$A_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 22,1 \cdot 5,9 = 65,195 \approx 65,2 \text{ cm}^2.$$