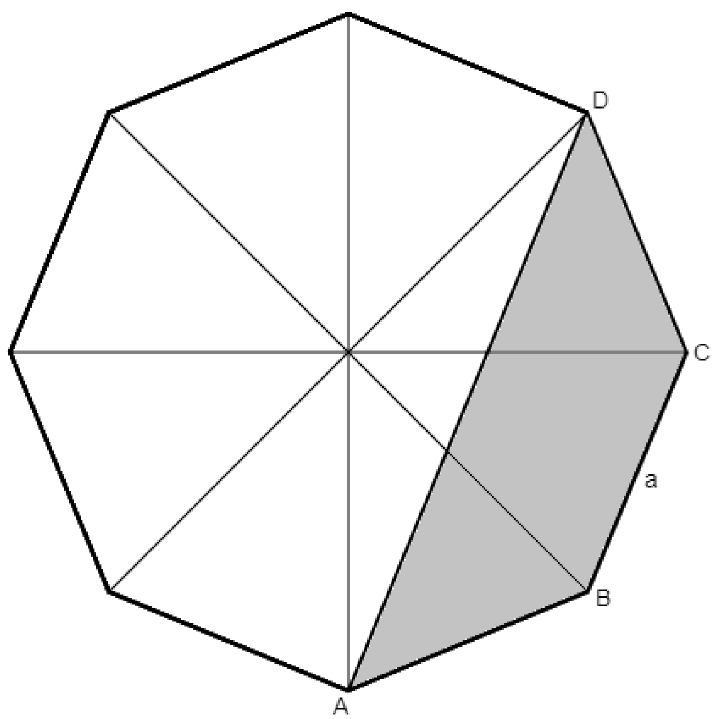
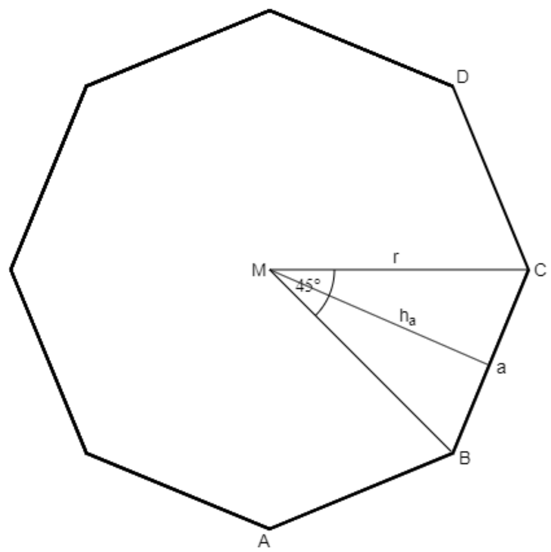
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Geometrie/Trigonometrie
> Regelmäßiges Achteck/Trapez

Aufgabe: Bei einem regelmäßigen Achteck mit Achteckseite a = 6 cm ist der Flächeninhalt des Trapezes ABCD zu berechnen.



Lösung: I. Das regelmäßige Achteck besteht aus acht gleichschenkligen Dreiecken mit Schenkel r, Basisseite a = 6 cm und (Achteckinnen-) Winkel φ = 360°:8 = 45°.



Im gleichschenkligen Dreieck ΔMBC berechnen wir mit a = $\overline{BC}$ = 6 cm bzw. a/2 = 3 cm sowie den Innenwinkel φ = 45° bzw. φ/2 = 22,5° den Achteckradius und Dreieckschenkel r und die Dreieckhöhe h_a:

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{r} \Rightarrow \sin 22{,}5° = \frac{3}{r} \Rightarrow r = \frac{3}{\sin 22{,}5°} = 7{,}84 \text{ cm}$$

$$\tan\frac{\varphi}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{h_a} \Rightarrow \tan 22{,}5° = \frac{3}{h_a} \Rightarrow h_a = \frac{3}{\tan 22{,}5°} = 7{,}24 \text{ cm.}$$

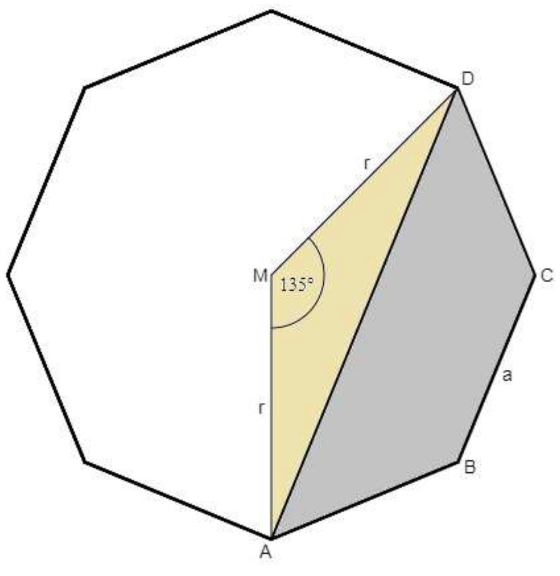
Die Dreieckfläche ist dann gemäß $A_\Delta = \frac{1}{2} a h_a$:

$A_{\Delta MBC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 7{,}24 = 21{,}74 \text{ cm}^2$.

II. Mit M als Mittelpunkt des Achtecks betrachten wir das gleichschenklige Dreieck ΔMAD. Der Winkel μ der Ecke M erstreckt sich über drei gleichschenklige Dreiecke des Achtecks und hat daher eine Weite von μ = 3·45° = 135°. Wir bestimmen den Flächeninhalt des Dreiecks ΔMAD mit der Formel für allgemeine Dreiecke, wenn nur zwei Seiten (hier die Schenkel r) und der dazwischenliegende Winkel (hier μ) gegeben ist: $A_\Delta = \frac{1}{2} r^2 \sin(180° - \mu)$. Dann folgt:

$A_{\Delta MAD} = \frac{1}{2} \cdot 7{,}84^2 \cdot \sin(180° - 135°) = \frac{1}{2} \cdot 7{,}84^2 \cdot \sin 45° = 21{,}74 \text{ cm}^2$.

Die Flächeninhalte $A_{\Delta MBC}$ und $A_{\Delta MAD}$ sind also gleich groß.



III. Der gesuchte Flächeninhalt des Trapezes ABCD ergibt sich als Differenz des Flächeninhalts von den drei gleichschenkligen Dreiecken ΔMAB, ΔMBC, ΔMCD des Achtecks und des Flächeninhalts des Dreiecks ΔMAD:

$A_{ABCD} = 3 \cdot A_{\Delta MBC} - A_{\Delta MAD} = 3 \cdot 21{,}74 - 21{,}74 = 2 \cdot 21{,}74 = 43{,}48 \approx 43{,}5 \text{ cm}^2$.

Der Flächeninhalt des Trapezes ABCD macht also ein Viertel des Flächeninhalts des Achtecks aus.

www.michael-buhlmann.de / 10.2020 / Aufgabe 1147