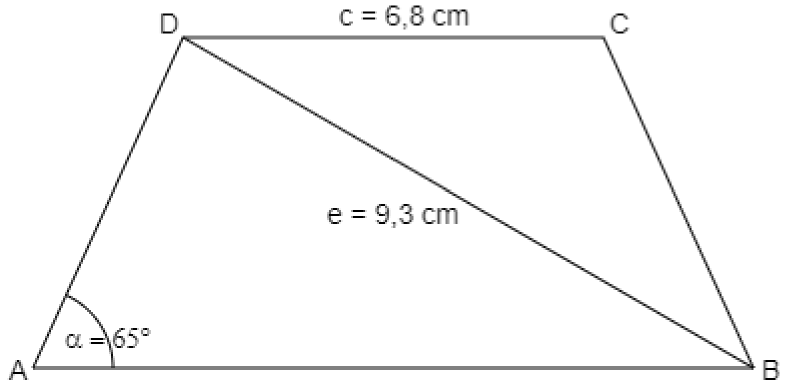
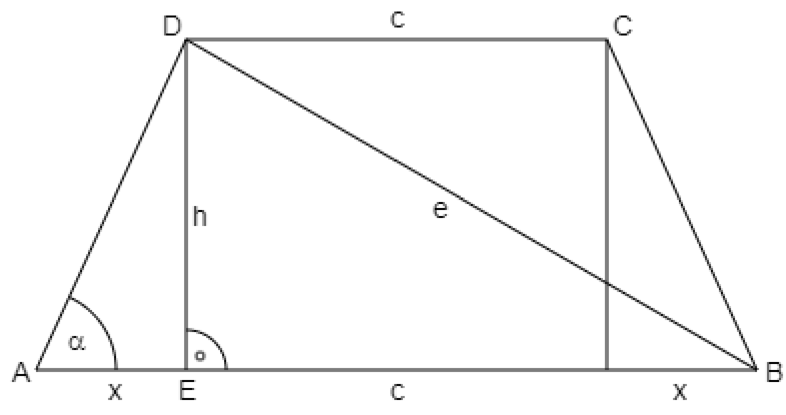
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Geometrie/Trigonometrie
> Gleichschenkliges Trapez

Aufgabe: Für das gleichschenklige Trapez ABCD ist der Flächeninhalt zu errechnen.



Lösung: I. Das gleichschenklige Trapez ABCD unterteilen wir vermöge der Trapezhöhe h in zwei zueinander kongruente rechtwinklige Dreiecke ΔADE und in das zwischen den Dreiecken liegende Rechteck mit den Seiten h und c.



II. Wir betrachten die Beziehungen zwischen den Strecken h und x. Einerseits gilt im rechtwinkligen Dreieck ΔADE mit Hilfe des Tangens:

$\tan\alpha = \frac{h}{x}$ => $\tan 65° = \frac{h}{x}$ => $h = x \cdot \tan 65°$ = 2,1445x (1).

Zum anderen ergibt sich gemäß dem Satz des Pythagoras im rechtwinkligen Dreieck ΔBDE:

$e^2 = h^2 + (x+c)^2$ => $9{,}3^2 = h^2 + (x+6{,}8)^2$ => $h^2 = 9{,}3^2 - (x+6{,}8)^2$ (2).

III. Die Gleichungen (1) und (2) stellen ein Gleichungssystem mit den Unbekannten x und h dar:

$h = 2{,}1445x$ (1)
$h^2 = 9{,}3^2 - (x+6{,}8)^2$ (2).

Wir ersetzen h in der Gleichung (2) durch h = 2,1445x gemäß Gleichung (1) und erhalten die nur noch von x abhängige quadratische Gleichung:

$(2{,}1445x)^2 = 9{,}3^2 - (x+6{,}8)^2$ (3),

die wir wie folgt nach x auflösen:

$4{,}6x^2 = 86{,}49 - (x+6{,}8)^2$	(1. binomische Formel)
$4{,}6x^2 = 86{,}49 - (x^2+13{,}6x+46{,}24)$	(Klammer auflösen)
$4{,}6x^2 = 86{,}49 - x^2 - 13{,}6x - 46{,}24$	(Zusammenfassen)
$4{,}6x^2 = -x^2 - 13{,}6x + 40{,}25$	$\mid -4{,}6x^2$
$0 = -5{,}6x^2 - 13{,}6x + 40{,}25$	$\mid :(-5{,}6)$
$0 = x^2 + 2{,}43x - 7{,}19$	(p-q-Formel: p = 2,43, q = -7,19)

$$x_{1,2} = -\frac{2{,}43}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2{,}43}{2}\right)^2 + 7{,}19} = -1{,}215 \pm \sqrt{8{,}67} = -1{,}215 \pm 2{,}944$$

$x_1 = -1{,}215 + 2{,}944 = 1{,}729$, $x_2 = -1{,}215 - 2{,}944 = -4{,}159$.

Die negative Lösung x_2 können wir ausschließen, die Seite x im Dreieck ΔADE hat somit die Länge:

$x = 1{,}729 \approx 1{,}7$ cm.

IV. Mit Hilfe von x = 1,729 können wir auch die Trapezhöhe h bestimmen, da laut Gleichung (1) gilt:

$h = 2{,}1445 \cdot 1{,}729 = 3{,}708 \approx 3{,}7$ cm.

V. Die Länge der Trapezseite a = $\overline{AB}$ beläuft sich ebenfalls wegen x = 1,729 auf:

$a = c + 2x = 6{,}8 + 2 \cdot 1{,}729 = 10{,}258 \approx 10{,}3$ cm.

VI. Der Flächeninhalt des Trapezes ABCD ist gemäß der Formel $A_{Tr} = \frac{1}{2}(a+c)h$:

$A_{ABCD} = \frac{1}{2}(10{,}3 + 6{,}8) \cdot 3{,}7 = 31{,}635 \approx 31{,}6$ cm^2.

www.michael-buhlmann.de / 10.2020 / Aufgabe 1152