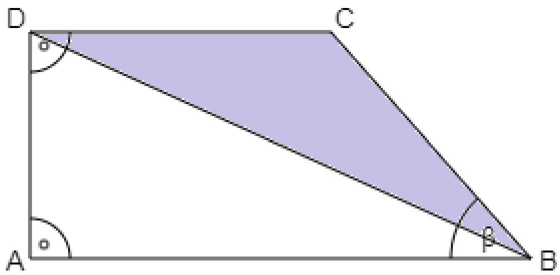
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Geometrie/Trigonometrie
> Rechtwinkliges Trapez

Aufgabe: Im rechtwinkligen Trapez ABCD gilt: $\overline{AB}$ = 10 cm, $\overline{AD}$ = 4,5 cm, $\overline{BC} = \overline{CD}$, β = 48,2°. Welchen Anteil hat der Flächeninhalt des Dreiecks ΔBCD am Flächeninhalt des gesamten Trapezes.

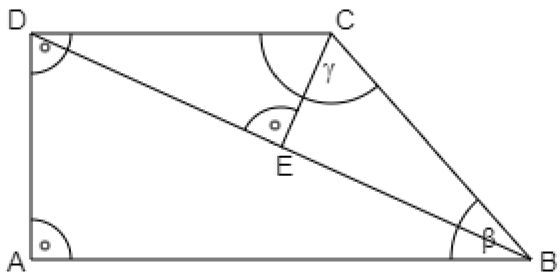


Lösung: I. Wegen $\overline{BC} = \overline{CD}$ ist das Dreieck ΔBCD gleichschenklig, die Basisseite $\overline{BD}$ beträgt gemäß dem Satz des Pythagoras im rechtwinkligen Dreieck ΔABD:

$\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 = 10^2 + 4{,}5^2 = 120{,}25$ => $\overline{BD} = \sqrt{120{,}25}$ = 10,97 cm.

Der Winkel γ an der Spitze C des gleichschenkligen Dreiecks ΔBCD berechnet sich auf Grund der Winkelsumme von 360° im Trapez ABCD:

γ = 360° – 90° – 90° – 48,2° = 131,8°.



II. Damit haben wir alles, um den Flächeninhalt des Dreiecks ΔBCD zu bestimmen. Wir halbieren vermittels der Dreieckshöhe $\overline{CE}$ das gleichschenklige Dreieck und haben mit halber Basisseite $\overline{BD}$/2 = 5,49 cm und dem halben Winkel γ/2 = 131,8°:2 = 65,9°:

$\tan\frac{\gamma}{2} = \frac{\frac{\overline{BD}}{2}}{\overline{CE}}$ => $\tan 65{,}9° = \frac{5{,}49}{\overline{CE}}$ => $\overline{CE} = \frac{5{,}49}{\tan 65{,}9°}$ = 2,69 cm.

Zudem berechnen wir die Seite $\overline{CD}$ im gleichschenkligen Dreieck vermöge:

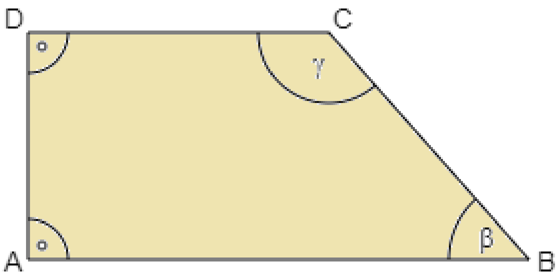
$\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{\frac{\overline{BD}}{2}}{\overline{CD}}$ => $\sin 65{,}9° = \frac{5{,}49}{\overline{CD}}$ => $\overline{CD} = \frac{5{,}49}{\sin 65{,}9°}$ = 6 cm.

III. Der Flächeninhalt des gleichschenkligen Dreiecks ΔBCD ist nun dank der Grundseite $\overline{BD}$ und der Höhe $\overline{CE}$:

$A_{\Delta BCD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{CE} = \frac{1}{2} \cdot 10{,}97 \cdot 2{,}69 = 14{,}75 \text{ cm}^2$.

IV. Die schon errechnete Seite $\overline{BC} = \overline{CD}$ = 6 cm ist eine der Parallelseiten im Trapez ABCD, so dass sich als Flächeninhalt dieses Vierecks ergibt:

$A_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overline{AB} + \overline{CD}\right) \cdot \overline{AD} = \frac{1}{2} \cdot (10+6) \cdot 4{,}5 = 36 \text{ cm}^2$.



V. Der prozentuale Anteil der Dreiecks- an der Trapezfläche bestimmt sich aus dem Quotienten der Flächeninhalte:

$\frac{A_{\Delta BCD}}{A_{ABCD}} = \frac{14{,}75}{36} = 0{,}4097 = 40{,}97\,\% \approx 41\,\%$.

Die Dreiecksfläche macht also rund 41 Prozent der Trapezfläche aus.

www.michael-buhlmann.de / 11.2020 / Aufgabe 1172