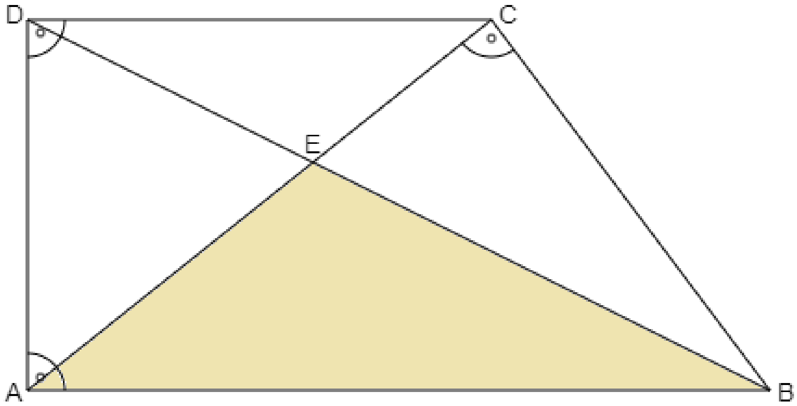
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Geometrie/Trigonometrie
> Rechtwinkliges Trapez

Aufgabe: Im rechtwinkligen Trapez ABCD gilt: $\overline{AB}$ = 8 cm, $\overline{BC}$ = 5 cm. Berechne die Länge des Umfangs und den Flächeninhalt des Dreiecks ΔABE.

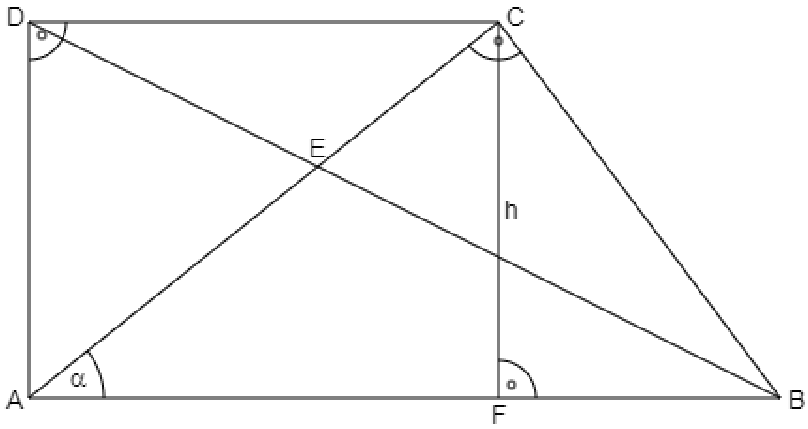


Lösung: I. Wir rechnen zunächst im rechtwinkligen Dreieck ΔABC den Winkel α aus und haben wegen der Hypotenuse $\overline{AB}$ = 8 cm und der Kathete $\overline{BC}$ = 5 cm:

$\sin\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$ => $\sin\alpha = \frac{5}{8} = 0{,}625$ => α = $\sin^{-1}(0{,}625)$ = 38,7°.

Für die zweite Kathete $\overline{AC}$ im Dreieck ΔABC gilt gemäß dem Satz des Pythagoras:

$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2 = 8^2 - 5^2 = 39$ => $\overline{AC} = \sqrt{39}$ = 6,24 cm.



II. Wir zeichnen die Höhe h und den Punkt F ein. Im so entstandenen rechtwinkligen Dreieck ΔAFC haben wir auf Grund der Hypotenuse $\overline{AC}$ = 6,24 cm und dem Winkel α = 38,7° als Kathetenlängen:

$\sin\alpha = \frac{\overline{CF}}{\overline{AC}}$ => $\sin 38{,}7° = \frac{\overline{CF}}{6{,}24}$ => h = $\overline{CF} = 6{,}24 \cdot \sin 38{,}7°$ = 3,9 cm

$\cos\alpha = \frac{\overline{AF}}{\overline{AC}}$ => $\cos 38{,}7° = \frac{\overline{AF}}{6{,}24}$ => $\overline{AF} = 6{,}24 \cdot \cos 38{,}7°$ = 4,87 cm.

III. Im rechtwinkligen Dreieck ΔABD gilt für die Katheten $\overline{AB}$ = 8 cm, $\overline{AD}$ = h = 3,9 cm, so dass sich als Winkel β_1 ergibt:

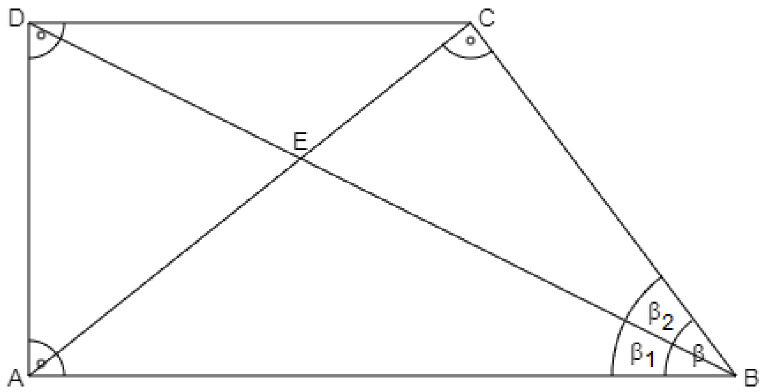
$\tan\beta_1 = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}$ => $\tan\beta_1 = \frac{3{,}9}{8} = 0{,}4875$ => $\beta_1 = \tan^{-1}(0{,}4875) = 26°$.

Der Winkel β im rechtwinkligen Dreieck ΔABC ist:

β = 90° – α = 90° – 38,7° = 51,3°.

Der Winkel β_2 im rechtwinkligen Dreieck ΔBCE ist folglich:

$\beta_2 = \beta - \beta_1 = 51{,}3° - 26° = 25{,}3°$.



IV. Wenn wir im rechtwinkligen Dreieck ΔBCE bleiben, so lassen wich wegen β_2 = 25,3° und $\overline{BC}$ = 5 cm die zweite Kathete und die Hypotenuse berechnen:

$\tan\beta_2 = \frac{\overline{CE}}{\overline{BC}}$ => $\tan 25{,}3° = \frac{\overline{CE}}{5}$ => $\overline{CE} = 5 \cdot \tan 25{,}3°$ = 2,36 cm

$\cos\beta_2 = \frac{\overline{BC}}{\overline{BE}}$ => $\cos 25{,}3° = \frac{5}{\overline{BE}}$ => $\overline{BE} = \frac{5}{\cos 25{,}3°}$ = 5,53 cm.

V. Den Umfang des Dreiecks ΔABE berechnen wir, indem wir zunächst $\overline{AE}$ ermitteln:

$\overline{AE} = \overline{AC} - \overline{CE}$ = 6,24 – 2,36 = 3,88 cm.

Nun gilt für den Umfang:

u = $\overline{AB} + \overline{AE} + \overline{BE}$ = 8 + 5,53 + 3,88 = 17,41 ≈ 17,4 cm.

V. Der Flächeninhalt des Dreiecks ΔABE berechnen wir der Einfachheit halber als:

$A_{\Delta ABE} = A_{ABCD} - A_{\Delta ACD} - A_{\Delta BCE}$

mit dem Flächeninhalt des Trapezes ABCD:

$A_{ABCD} = \frac{1}{2}\left(\overline{AB} + \overline{CD}\right)\cdot \overline{AD} = \frac{1}{2}\cdot(8 + 4{,}87)\cdot 3{,}9$ = 25,0965 cm²

(bei $\overline{AF} = \overline{CD}$), dem Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks ΔACD:

$A_{\Delta ACD} = \frac{1}{2}\cdot \overline{AD}\cdot\overline{CD} = \frac{1}{2}\cdot 3{,}9 \cdot 4{,}87$ = 9,4965 cm²,

dem Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks ΔACD:

$A_{\Delta ACD} = \frac{1}{2}\cdot \overline{BC}\cdot\overline{CE} = \frac{1}{2}\cdot 5 \cdot 2{,}36$ = 5,9 cm².

Es folgt:

$A_{\Delta ABE}$ = 25,0965 – 9,4965 – 5,9 = 9,7 cm².

www.michael-buhlmann.de / 11.2020 / Aufgabe 1173