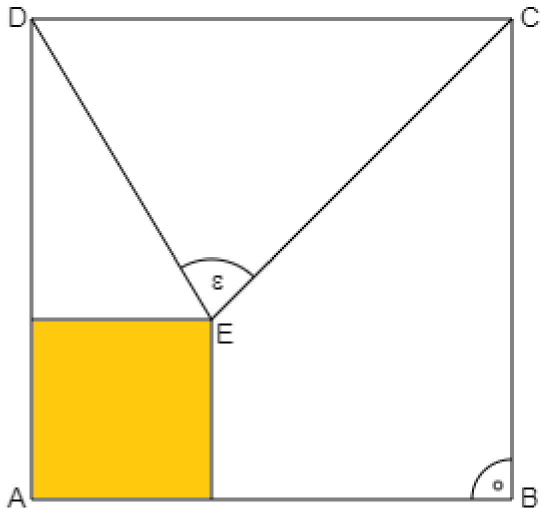
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Geometrie/Trigonometrie
> Quadrat im Quadrat

Aufgabe: Das Quadrat ABCD hat eine Seitenlange von 8 cm, der Winkel hat eine Weite von ε = 76°. Berechne den Flächeninhalt des innerhalb von ABCD befindlichen Quadrats, das als Ecken die Punkte A und E besitzt.



Lösung: I. In einem <u>rechtwinkligen Dreieck</u> ΔABC mit den Seiten a, b, c und den Winkeln α, β, γ bei γ = 90° heißen a und b Katheten, c Hypotenuse. Die Kathete, die gegenüber einem Winkel α oder β liegt, heißt Gegenkathete (bei Winkel α Seite a, bei Winkel β Seite b), die Kathete, die an einem Winkel α oder β liegt, heißt Ankathete (bei Winkel α Seite b, bei Winkel β Seite a). Dann gelten der Satz des Pythagoras:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ (Hypotenuse)}$$

$$a^2 = c^2 - b^2 \Rightarrow a = \sqrt{c^2 - b^2} \text{ (Kathete)}$$

$$b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow c = \sqrt{c^2 - a^2} \text{ (Kathete)}$$

und die trigonometrischen Beziehungen (Sinus, Kosinus, Tangens):

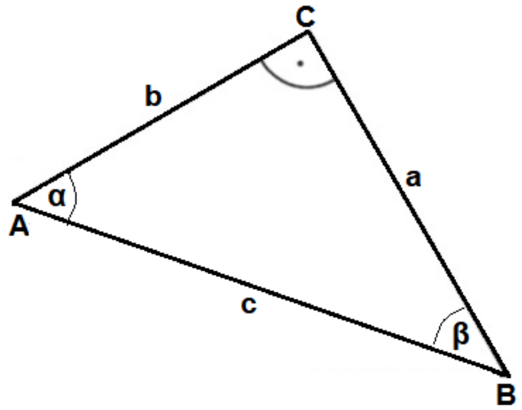
$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse},\ \cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{Ankathete}{Hypotenuse},\ \tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} \text{ (Winkel α)}$$

$$\sin\beta = \frac{b}{c} = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse},\ \cos\beta = \frac{a}{c} = \frac{Ankathete}{Hypotenuse},\ \tan\beta = \frac{b}{a} = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} \text{ (Winkel β)}$$

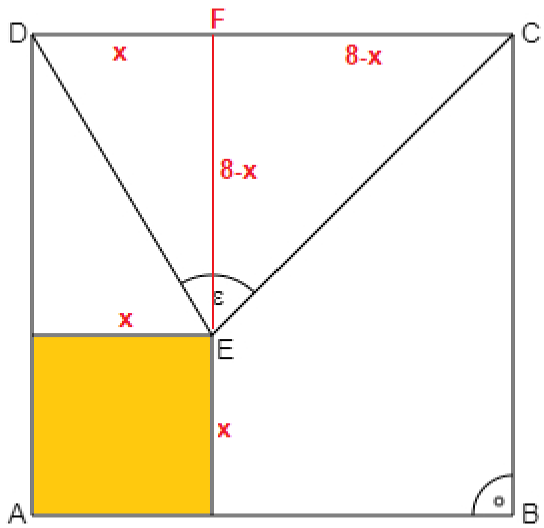
$$\sin\alpha = \cos\beta,\ \cos\alpha = \sin\beta,\ \tan\alpha = \frac{1}{\tan\beta},\ \tan\beta = \frac{1}{\tan\alpha}.$$

Mit den Dreieckswinkeln α, β und γ = 90° gelten noch die Beziehungen:

α + β = 90°, α = 90° – β, β = 90° – α.



II. Wir betrachten zunächst das allgemeine Dreieck ΔCDE und teilen dieses durch die Höhe $\overline{EF}$ in zwei Dreiecke mit rechtem Winkel auf. Ist die Unbekannte x die Seitenlänge des zu berechnenden Quadrats, so ist $\overline{EF}$ = 8-x die Höhe des Dreiecks ΔCDE, und die Teildreiecke ΔDEF bzw. ΔCFE haben die Katheten x und 8-x bzw. 8-x und 8-x:



III. Der Winkel ε = 76° wird durch die Höhe $\overline{EF}$ in zwei Teilwinkel ε_1 (ΔCDE) und ε_2 (ΔCFE) aufgeteilt. Das Dreieck ΔCFE ist wegen der gleichlangen Katheten 8-x gleichschenklig; der Winkel ε_2 hat damit die Größe ε_2 = 45°. Daher ist: $\varepsilon_1 = \varepsilon - \varepsilon_2 = 76° - 45° = 31°$.

IV. Im Dreieck ΔDEF können wir vermöge des Winkels ε_1 = 31° die Unbekannte x mit Hilfe des Tangens ausrechnen. Es gilt:

$$\tan \varepsilon_1 = \frac{\overline{DF}}{\overline{EF}} \Rightarrow \tan 31° = \frac{x}{8-x} \Rightarrow (8-x)\tan 31° = x \Rightarrow 8 \cdot \tan 31° - x \cdot \tan 31° = x =>$$

$$8 \cdot \tan 31° = x + x \cdot \tan 31° \Rightarrow 8 \cdot \tan 31° = x(1+\tan 31°) \Rightarrow x = \frac{8 \cdot \tan 31°}{(1+\tan 31°)} = 3 \text{ cm.}$$

V. Das zu berechnende Quadrat hat die Seitenlänge x = 3 cm, der gesuchte Flächeninhalt des Quadrats beträgt:
$A = 3^2 = 9\ \text{cm}^2$.

www.michael-buhlmann.de / 01.2021 / Aufgabe 1272