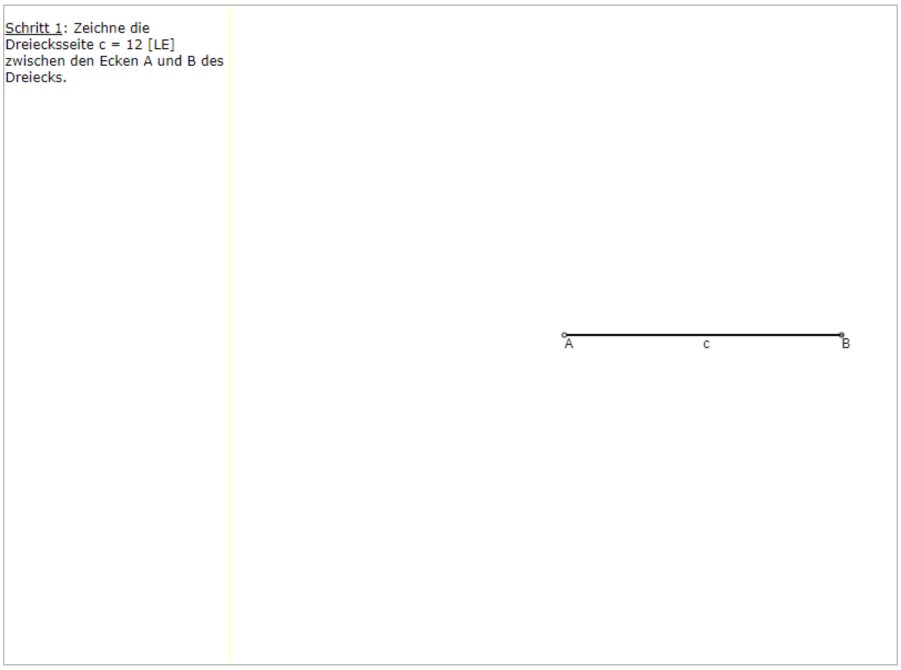
Michael Buhlmann

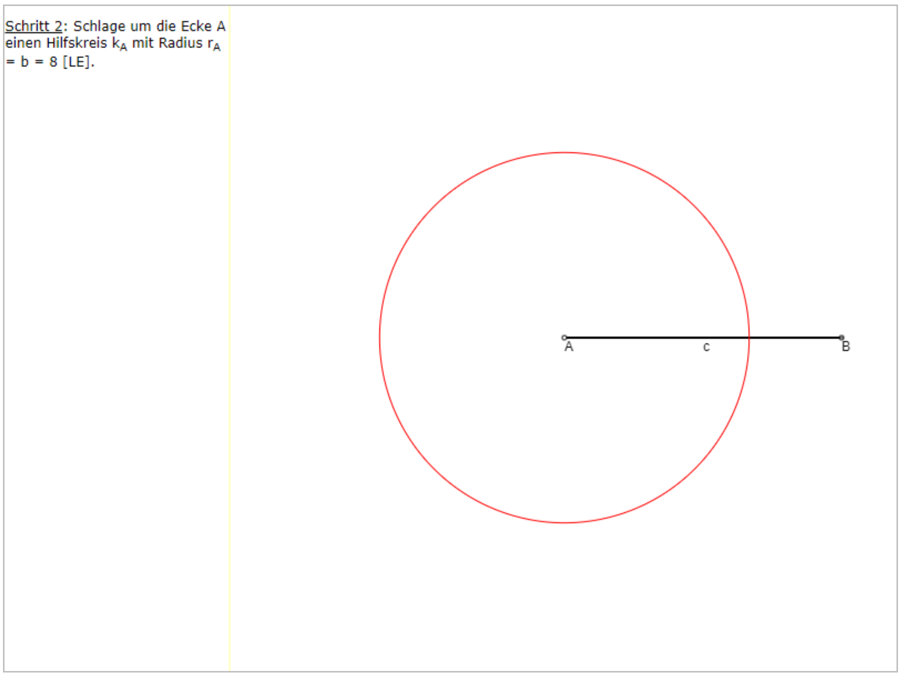
Mathematikaufgaben
> Geometrie/Trigonometrie
> Allgemeines Dreieck

Aufgabe: Von einem allgemeinen Dreieck ΔABC sind die Seiten bekannt: a = 6 cm, b = 8 cm, c = 12 cm.

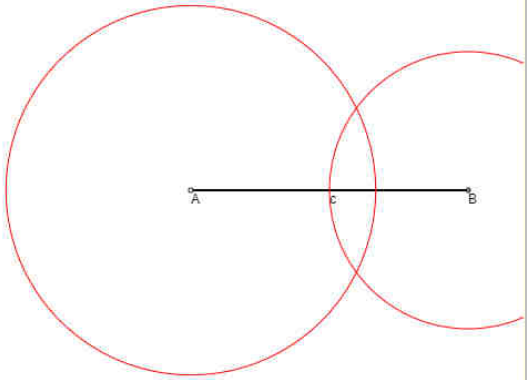
a) Konstruiere das Dreieck ΔABC.
b) Berechne die Winkel und den Flächeninhalt des Dreiecks.

Lösung: a) Gemäß den Kongruenzsatz SSS für die drei vorgegebenen Seiten des allgemeinen Dreiecks ΔABC gilt bei Konstruktion folgende Vorgehensweise (Schritt 1-6):

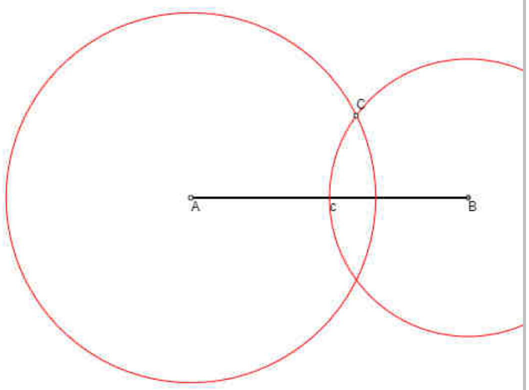




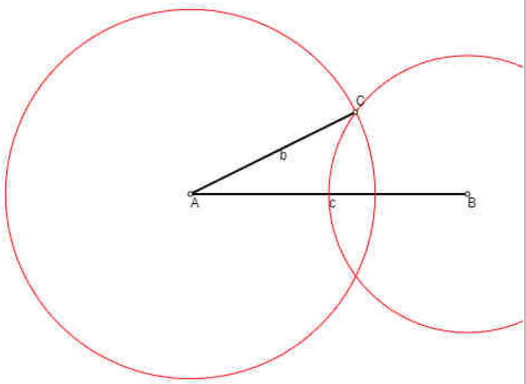
Schritt 3: Schlage um die Ecke B einen Hilfskreis k_B mit Radius $r_B = a = 6$ [LE].

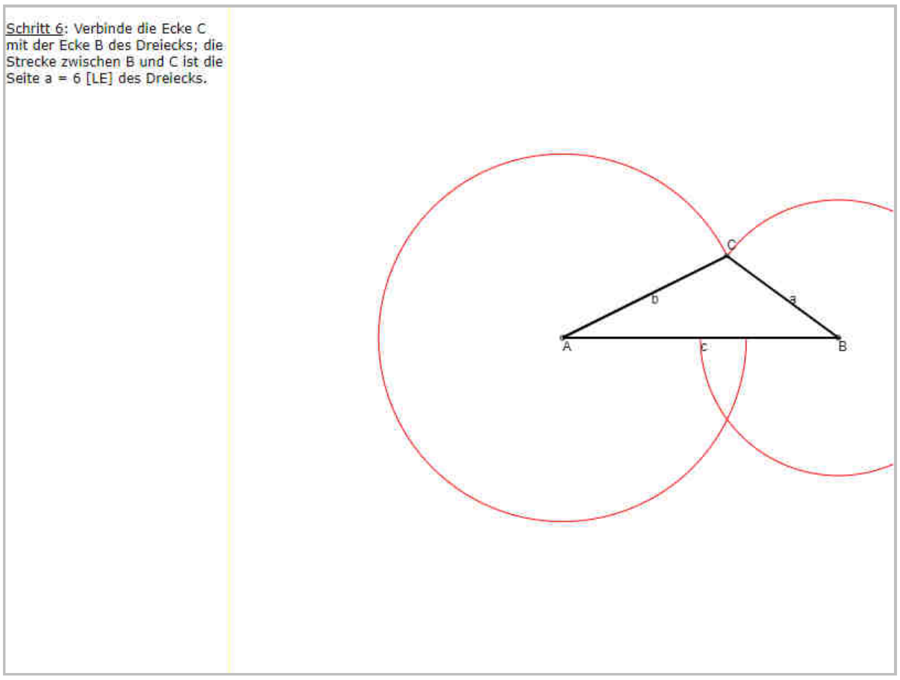


Schritt 4: Der Schnittpunkt der Hilfskreise k_A und k_B ist die Ecke C des Dreiecks.

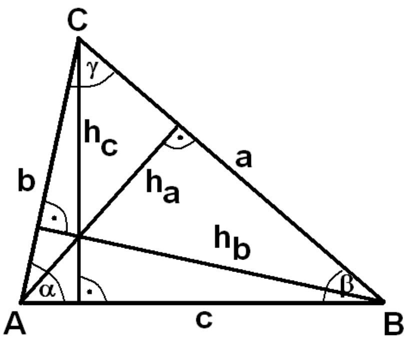


Schritt 5: Verbinde die Ecke C mit der Ecke A des Dreiecks; die Strecke zwischen A und C ist die Seite $b = 8$ [LE] des Dreiecks.





b) I. Ein <u>allgemeines Dreieck</u> ΔABC besitzt die Seiten a, b, c, die Höhen h_a, h_b, h_c und die Winkel α, β, γ:



Es gelten der Sinussatz:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$
$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta},\ \frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma},\ \frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$$

sowie der Kosinussatz:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$
$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},\ \cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac},\ \cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Für die Höhen im Dreieck ergeben sich die Beziehungen:

$$h_a = b\sin\gamma = c\sin\beta$$
$$h_b = a\sin\gamma = c\sin\alpha$$
$$h_c = a\sin\beta = b\sin\alpha,$$

ebenso für den Flächeninhalt:

$$A = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ac\sin\beta$$

und den Umfang und die Winkelsumme:

$$u = a + b + c,\ a = u - b - c,\ b = u - a - c,\ c = u - a - b,$$
$$\alpha + \beta + \gamma = 180°,\ \alpha = 180° - \beta - \gamma,\ \beta = 90° - \alpha - \gamma,\ \gamma = 180° - \alpha - \beta.$$

II. Sind in einem beliebigen Dreieck zwei Seiten mit dazwischenliegendem Winkel oder drei Seiten vorgegeben, so verwenden wir zur Berechnung der fehlenden Dreieckstücke den Kosinussatz. Um beispielsweise den <u>Winkel</u> α zu bestimmen, verwenden wir also den Kosinussatz:

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{8^2 + 12^2 - 6^2}{2 \cdot 8 \cdot 12} = 0{,}896.$$

Damit gilt:

$\cos\alpha = 0{,}896 \Rightarrow \alpha = 26{,}4°$.

Weiter ist gemäß dem Sinussatz:

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} \Leftrightarrow \sin\beta = \frac{b}{a}\sin\alpha = \frac{8}{6}\sin 26{,}4° = 0{,}593 \Rightarrow \beta = 36{,}3°,$$

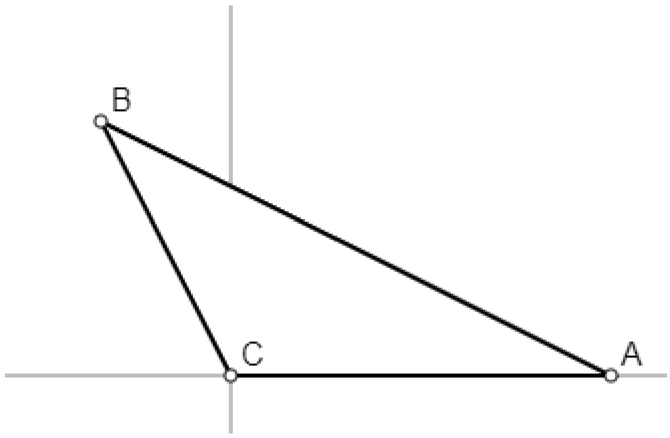
woraus mit der Winkelsumme von 180° im Dreieck folgt:

$\gamma = 180° - 26{,}4° - 36{,}3° = 117{,}3°$.

III. Der <u>Flächeninhalt</u> des Dreiecks errechnet sich als:

$$A = \frac{1}{2}ac\sin\beta = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 12 \cdot \sin 36{,}3° = 42{,}48 \text{ cm}^2.$$

IV. <u>Zeichnung</u>:



www.michael-buhlmann.de / 06.2022 / Aufgabe 1644