

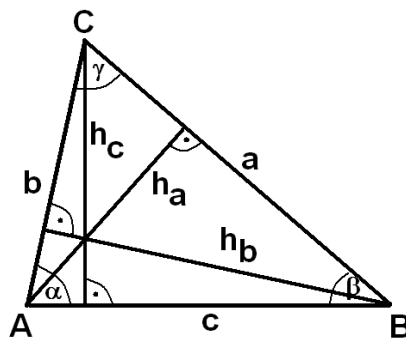
Mathematikaufgaben

> Geometrie/Trigonometrie

> Allgemeines Dreieck

Aufgabe: Von einem allgemeinen Dreieck $\triangle ABC$ sind bekannt: die Seiten $a = 4 \text{ cm}$, $b = 6 \text{ cm}$, der Winkel $\alpha = 30^\circ$. Berechne die Seite c und die Winkel β und γ .

Lösung: I. Ein allgemeines Dreieck $\triangle ABC$ besitzt die Seiten a , b , c , die Höhen h_a , h_b , h_c und die Winkel α , β , γ :



Es gelten der Sinussatz:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}, \frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}, \frac{a}{c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}$$

sowie der Kosinussatz:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Für die Höhen im Dreieck ergeben sich die Beziehungen:

$$h_a = b \sin \gamma = c \sin \beta$$

$$h_b = a \sin \gamma = c \sin \alpha$$

$$h_c = a \sin \beta = b \sin \alpha,$$

ebenso für den Flächeninhalt:

$$A = \frac{1}{2} ab \sin \gamma = \frac{1}{2} bc \sin \alpha = \frac{1}{2} ac \sin \beta$$

und den Umfang und die Winkelsumme:

$$u = a + b + c, a = u - b - c, b = u - a - c, c = u - a - b,$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ, \alpha = 180^\circ - \beta - \gamma, \beta = 180^\circ - \alpha - \gamma, \gamma = 180^\circ - \alpha - \beta.$$

II. Sind in einem beliebigen Dreieck zwei Seiten und ein Winkel, der gegenüber einer der Seiten liegt, bzw. zwei Winkel und eine Seite vorgegeben, so verwenden wir den Sinussatz zur Berechnung der fehlenden Dreieckstücke. Es gilt nach dem Sinussatz für den Winkel β :

$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{b}{a} \Leftrightarrow \sin \beta = \frac{b}{a} \sin \alpha = \frac{6}{4} \sin 30^\circ = 0,75 \Rightarrow \beta = 48,6^\circ$$

Der Winkel γ errechnet sich dann gemäß der Winkelsumme von 180° im Dreieck als:

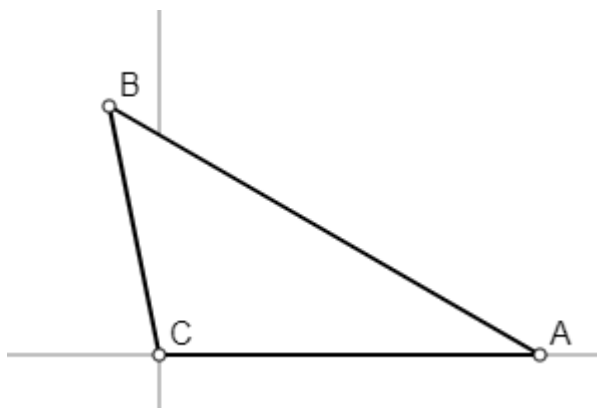
$$\gamma = 180^\circ - 30^\circ - 48,6^\circ = 101,4^\circ.$$

III. Für die noch fehlende Seite c ergibt sich ebenfalls nach dem Sinussatz:

$$\frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{c}{a} \Leftrightarrow c = a \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} = 4 \cdot \frac{\sin 101,4^\circ}{\sin 30^\circ} = 7,8 \text{ cm.}$$

Damit ist alles berechnet.

IV. Zeichnung:



www.michael-buhlmann.de / 06.2022 / Aufgabe 1645