

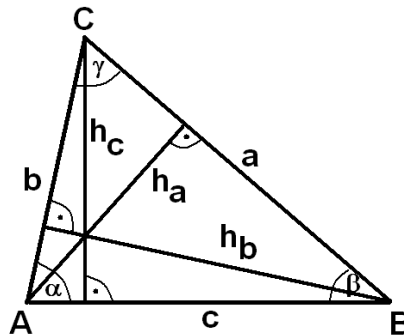
Mathematikaufgaben

> Geometrie/Trigonometrie

> Allgemeines Dreieck

Aufgabe: Von einem allgemeinen Dreieck $\triangle ABC$ sind bekannt: die Seite $c = 16$ cm, die Winkel $\alpha = 40^\circ$, $\beta = 70^\circ$. Berechne die Seiten a und b sowie den Winkel γ .

Lösung: I. Ein allgemeines Dreieck $\triangle ABC$ besitzt die Seiten a , b , c , die Höhen h_a , h_b , h_c und die Winkel α , β , γ :



Es gelten der Sinussatz:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}, \frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}, \frac{a}{c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}$$

sowie der Kosinussatz:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Für die Höhen im Dreieck ergeben sich die Beziehungen:

$$h_a = b \sin \gamma = c \sin \beta$$

$$h_b = a \sin \gamma = c \sin \alpha$$

$$h_c = a \sin \beta = b \sin \alpha,$$

ebenso für den Flächeninhalt:

$$A = \frac{1}{2} ab \sin \gamma = \frac{1}{2} bc \sin \alpha = \frac{1}{2} ac \sin \beta$$

und den Umfang und die Winkelsumme:

$$u = a + b + c, a = u - b - c, b = u - a - c, c = u - a - b,$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ, \alpha = 180^\circ - \beta - \gamma, \beta = 180^\circ - \alpha - \gamma, \gamma = 180^\circ - \alpha - \beta.$$

II. Für den Winkel γ gilt zunächst wegen der Winkelsumme von 180° im Dreieck:

$$\gamma = 180^\circ - 40^\circ - 70^\circ = 70^\circ,$$

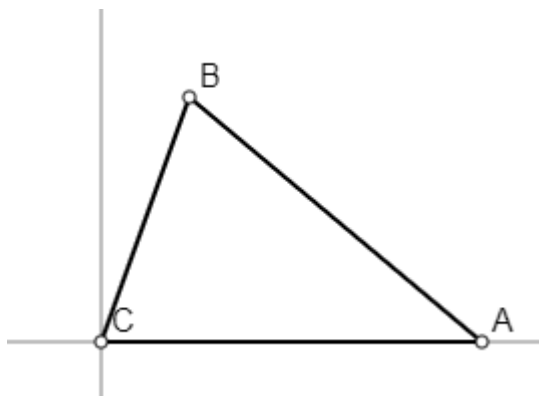
womit ein gleichschenkliges Dreieck vorliegt. Damit gilt: $b = c = 16 \text{ cm}$.

III. Sind in einem beliebigen Dreieck zwei Seiten und ein Winkel, der gegenüber einer der Seiten liegt, bzw. zwei Winkel und eine Seite vorgegeben, so verwenden wir den Sinussatz zur Berechnung der fehlenden Dreieckstücke. Somit berechnen wir die noch fehlende Seite a nach dem Sinussatz:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{a}{c} \Leftrightarrow a = c \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = 16 \cdot \frac{\sin 40^\circ}{\sin 70^\circ} = 10,9 \text{ cm}.$$

Damit ist alles berechnet.

IV. Zeichnung:



www.michael-buhlmann.de / 06.2022 / Aufgabe 1647