

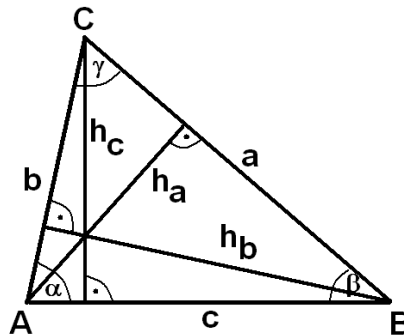
Mathematikaufgaben

> Geometrie/Trigonometrie

> Allgemeines Dreieck

Aufgabe: Von einem allgemeinen Dreieck $\triangle ABC$ sind bekannt: die Seiten $a = 8,8$ cm, $b = 6,1$ cm, der Winkel $\gamma = 108^\circ$. Berechne die Seite c sowie die Winkel α und β .

Lösung: I. Ein allgemeines Dreieck $\triangle ABC$ besitzt die Seiten a, b, c , die Höhen h_a, h_b, h_c und die Winkel α, β, γ :



Es gelten der Sinussatz:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}, \frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}, \frac{a}{c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}$$

sowie der Kosinussatz:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Für die Höhen im Dreieck ergeben sich die Beziehungen:

$$h_a = b \sin \gamma = c \sin \beta$$

$$h_b = a \sin \gamma = c \sin \alpha$$

$$h_c = a \sin \beta = b \sin \alpha,$$

ebenso für den Flächeninhalt:

$$A = \frac{1}{2} ab \sin \gamma = \frac{1}{2} bc \sin \alpha = \frac{1}{2} ac \sin \beta$$

und den Umfang und die Winkelsumme:

$$u = a + b + c, a = u - b - c, b = u - a - c, c = u - a - b,$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ, \alpha = 180^\circ - \beta - \gamma, \beta = 180^\circ - \alpha - \gamma, \gamma = 180^\circ - \alpha - \beta.$$

II. Sind in einem beliebigen Dreieck zwei Seiten mit dazwischenliegendem Winkel oder drei Seiten vorgegeben, so verwenden wir zur Berechnung der fehlenden Dreieckstücke den Kosinussatz. Somit berechnen wir zunächst die fehlende Seite c nach dem Kosinussatz:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma = 8,8^2 + 6,1^2 - 2 \cdot 8,8 \cdot 6,1 \cdot \cos 108^\circ = 147,83 \Rightarrow c = 12,2 \text{ cm.}$$

II. Für den Winkel α gilt nach dem Sinussatz:

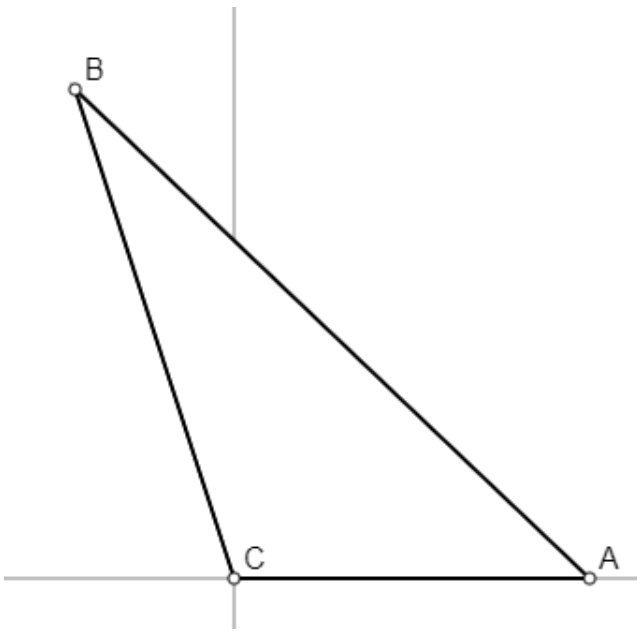
$$\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{a}{c} \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{a}{c} \sin \gamma = \frac{8,8}{12,2} \sin 108^\circ = 0,686 \Rightarrow \alpha = 43,3^\circ,$$

so dass wegen der Winkelsumme von 180° im Dreieck für den Winkel β folgt:

$$\beta = 180^\circ - 108^\circ - 43,3^\circ = 28,7^\circ.$$

Damit ist alles berechnet.

IV. Zeichnung:



www.michael-buhlmann.de / 06.2022 / Aufgabe 1648