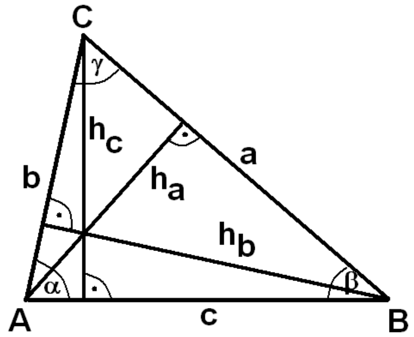
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Geometrie/Trigonometrie
> Allgemeines Dreieck

Aufgabe: Von einem allgemeinen Dreieck ΔABC sind bekannt: die Seiten a = 4 cm, b = 6 cm, der Winkel α = 60°. Zeige, dass ein solches Dreieck nicht konstruiert werden kann.

Lösung: I. Ein <u>allgemeines Dreieck</u> ΔABC besitzt die Seiten a, b, c, die Höhen h_a, h_b, h_c und die Winkel α, β, γ:



Es gelten der Sinussatz:

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta},\ \frac{b}{c}=\frac{\sin\beta}{\sin\gamma},\ \frac{a}{c}=\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$$

sowie der Kosinussatz:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$$
$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos\beta$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$$

$$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\ \cos\beta=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac},\ \cos\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

Für die Höhen im Dreieck ergeben sich die Beziehungen:

$$h_a=b\sin\gamma=c\sin\beta$$
$$h_b=a\sin\gamma=c\sin\alpha$$
$$h_c=a\sin\beta=b\sin\alpha,$$

ebenso für den Flächeninhalt:

$$A=\frac{1}{2}ab\sin\gamma=\frac{1}{2}bc\sin\alpha=\frac{1}{2}ac\sin\beta$$

und den Umfang und die Winkelsumme:

u = a + b + c, a = u – b – c, b = u – a – c, c = u –a – b,
α + β + γ= 180°, α = 180° – β – γ, β = 90° – α – γ, γ = 180° –α – β.

II. Es ist:

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{b}{a} \Leftrightarrow \sin\beta = \frac{b}{a}\sin\alpha = \frac{6}{4}\cdot\sin 60^\circ = 1{,}3,$$

woraus die Nichtexistenz des gesuchten Dreiecks folgt. Nicht jede Vorgaben von Seiten und/oder Winkeln führen also wirklich auf ein existierendes Dreieck. U.a. ist dies erkennbar daran, dass in der Berechnung Zahlen auftreten, für die es keine Sinus- und Kosinuswerte gibt. Dem entspricht es, dass die in der Aufgabe vorgegebene Konstellation aus Seiten und Winkel nicht einem Kongruenzsatz für Dreiecke genügt.

www.michael-buhlmann.de / 06.2022 / Aufgabe 1649