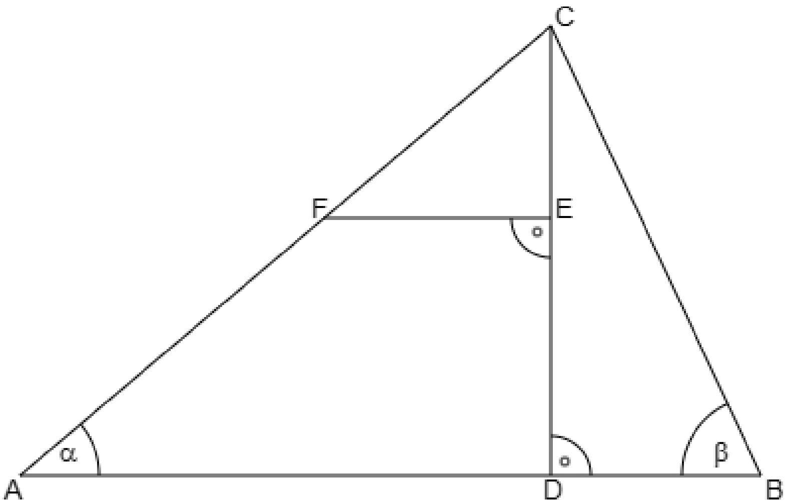
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Geometrie/Trigonometrie
> Dreieck

Aufgabe: Im Dreieck ΔABC gilt: $\overline{BC}$ = 10,0 cm, $\overline{AF}$ = 8,0 cm, α = 40°, β = 65°. Berechne den Flächeninhalt des Teildreiecks ΔCEF.



1. Lösung: I. Im rechtwinkligen Dreieck ΔBCD ist der Winkel β = 65°, die Hypotenuse $\overline{BC}$ = 10,0 cm. Für die Kathete $\overline{CD}$ gilt damit:

$$\sin\beta = \frac{\overline{CD}}{\overline{BC}} \Rightarrow \sin 65° = \frac{\overline{CD}}{10} \Rightarrow \overline{CD} = 10 \cdot \sin 65° = 9{,}06 \text{ cm.}$$

II. Im rechtwinkligen Dreieck ΔADC ist der Winkel α = 40°, die Kathete $\overline{CD}$ = 9,06 cm. Wir bestimmen die zweite Kathete $\overline{AD}$ mit:

$$\tan\alpha = \frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} \Rightarrow \tan 40° = \frac{9{,}06}{\overline{AD}} \Rightarrow \overline{AD} = \frac{9{,}06}{\tan 40°} = 10{,}80 \text{ cm}$$

und die Hypotenuse $\overline{AC}$ mit:

$$\sin\alpha = \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} \Rightarrow \sin 40° = \frac{9{,}06}{\overline{AC}} \Rightarrow \overline{AC} = \frac{9{,}06}{\sin 40°} = 14{,}09 \text{ cm.}$$

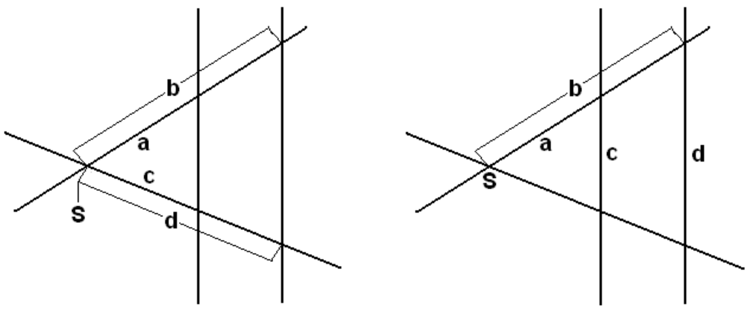
III. Die weitere Berechnung soll nun über die Strahlensätze erfolgen. Es gilt damit die geometrische Situation: Zwei vom Strahlenzentrum S ausgehende Geraden werden von zwei parallelen Geraden geschnitten. Dann gilt der <u>1. Strahlensatz</u>:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ bzw. } \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

für jeweils zwei bei S beginnende Strecken a und b auf dem 1. sowie c und d auf dem zweiten Geradenstrahl. Ebenso gilt der <u>2. Strahlensatz</u>:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ bzw. } \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

für die zwei bei S beginnenden Strecken a und b auf einem Geradenstrahl sowie die Strecken c und d auf den Parallelen.



1. Strahlensatz | 2. Strahlensatz

Es gilt damit die Faustregel:

$$\frac{kurz}{lang} = \frac{kurz}{lang} \text{ bzw. } \frac{lang}{kurz} = \frac{lang}{kurz}.$$

IV. Im rechtwinkligen Dreieck ΔADC ergibt sich die Teilstrecke $\overline{CF}$ aus der Teilstrecke $\overline{AF}$ = 8,0 cm auf Grund von:

$\overline{CF} = \overline{AC} - \overline{AF}$ = 14,09 – 8 = 6,09 cm.

Damit ist alles bereit für die Anwendung der Strahlensätze. Gemäß dem 1. Strahlensatz gilt nämlich:

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{CF}}{\overline{AC}} \Rightarrow \frac{\overline{CE}}{9{,}06} = \frac{6{,}09}{14{,}09} \Rightarrow \overline{CE} = \frac{6{,}09}{14{,}09} \cdot 9{,}06 = 3{,}92 \text{ cm.}$$

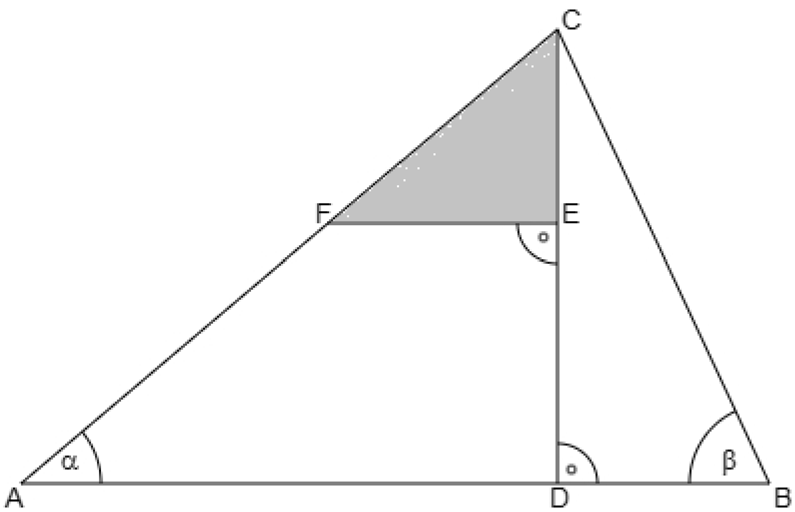
Gemäß dem 2. Strahlensatz gilt weiter:

$$\frac{\overline{EF}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{CF}}{\overline{AC}} \Rightarrow \frac{\overline{EF}}{10{,}8} = \frac{6{,}09}{14{,}09} \Rightarrow \overline{EF} = \frac{6{,}09}{14{,}09} \cdot 10{,}8 = 4{,}67 \text{ cm.}$$

Die beiden Katheten des rechtwinkligen Dreiecks ΔCEF sind damit bekannt.

V. Der gesuchte Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks ΔCEF ergibt sich aus dem Produkt der beiden Katheten $\overline{CE}$ = 3,92 cm, $\overline{EF}$ = 4,67 cm geteilt durch 2:

$A_{\Delta CEF} = \frac{1}{2} \cdot \overline{CE} \cdot \overline{EF} = \frac{1}{2} \cdot 3{,}92 \cdot 4{,}67$ = 9,15 ≈ 9,2 cm².



2. Lösung: I. Im rechtwinkligen Dreieck ΔBCD ist der Winkel β = 65°, die Hypotenuse $\overline{BC}$ = 10,0 cm. Für die Kathete $\overline{CD}$ gilt damit:

$$\sin\beta = \frac{\overline{CD}}{\overline{BC}} \text{ => } \sin 65° = \frac{\overline{CD}}{10} \text{ => } \overline{CD} = 10 \cdot \sin 65° = 9{,}06 \text{ cm.}$$

II. Im rechtwinkligen Dreieck ΔADC ist der Winkel α = 40°, die Kathete $\overline{CD}$ = 9,06 cm. Wir bestimmen die zweite Kathete $\overline{AD}$ mit:

$$\tan\alpha = \frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} \text{ => } \tan 40° = \frac{9{,}06}{\overline{AD}} \text{ => } \overline{AD} = \frac{9{,}06}{\tan 40°} = 10{,}80 \text{ cm}$$

und die Hypotenuse $\overline{AC}$ mit:

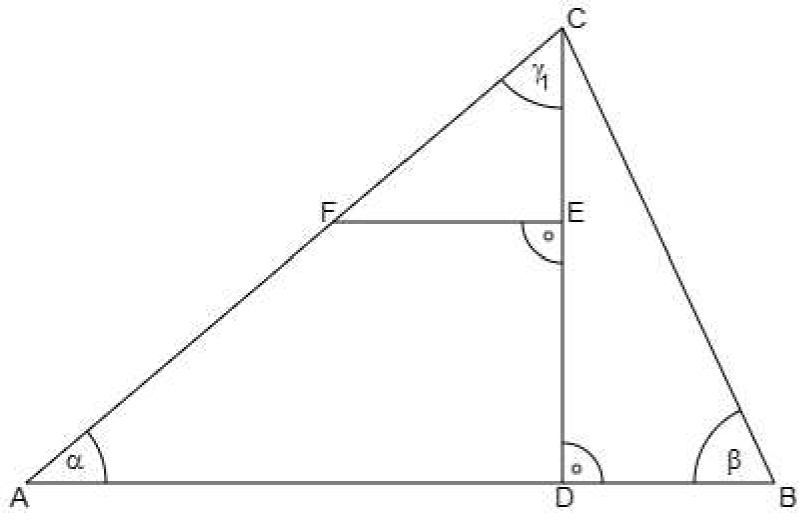
$$\sin\alpha = \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} \text{ => } \sin 40° = \frac{9{,}06}{\overline{AC}} \text{ => } \overline{AC} = \frac{9{,}06}{\sin 40°} = 14{,}09 \text{ cm.}$$

III. Im rechtwinkligen Dreieck ΔADC ergibt sich die Teilstrecke $\overline{CF}$ aus der Teilstrecke $\overline{AF}$ = 8,0 cm auf Grund von:

$\overline{CF} = \overline{AC} - \overline{AF}$ = 14,09 – 8 = 6,09 cm.

Weiter besitzt der Winkel γ_1 bei C die Weite:

γ_1 = 90° – α = 90° – 40° = 50°.



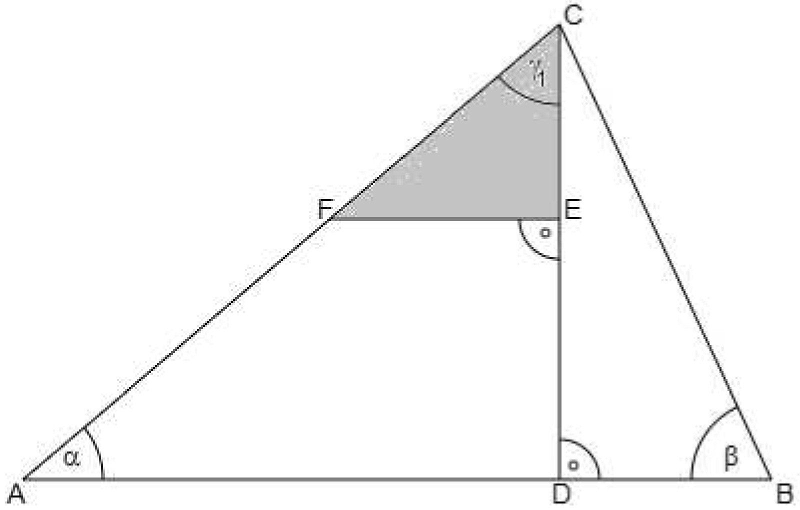
IV. Im rechtwinkligen Dreieck ΔCEF ist die Hypotenuse $\overline{CF}$ = 6,09 cm bekannt sowie der Winkel γ_1 = 50°. Somit errechnen wir die beiden Katheten im Dreieck wie folgt:

$$\cos\gamma_1 = \frac{\overline{CE}}{\overline{CF}} \text{ => } \cos 50° = \frac{\overline{CE}}{6{,}09} \text{ => } \overline{CE} = 6{,}09 \cdot \cos 50° = 3{,}91 \text{ cm.}$$

$$\sin\gamma_1 = \frac{\overline{EF}}{\overline{CF}} \text{ => } \sin 50° = \frac{\overline{EF}}{6{,}09} \text{ => } \overline{EF} = 6{,}09 \cdot \sin 50° = 4{,}67 \text{ cm.}$$

V. Der gesuchte Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks ΔCEF ergibt sich aus dem Produkt der beiden Katheten $\overline{CE}$ = 3,91 cm, $\overline{EF}$ = 4,67 cm geteilt durch 2:

$A_{\Delta CEF} = \frac{1}{2} \cdot \overline{CE} \cdot \overline{EF} = \frac{1}{2} \cdot 3{,}91 \cdot 4{,}67 = 9{,}13 \approx 9{,}1$ cm^2.



(Die leicht unterschiedlichen Endergebnisse bzgl. des gesuchten Flächeninhalts ergeben sich aus den unterschiedlichen Vorgehensweisen bei der Aufgabenlösung und den daraus resultierenden Rundungsfehlern.)

www.michael-buhlmann.de / 05.2024 / Aufgabe 2045