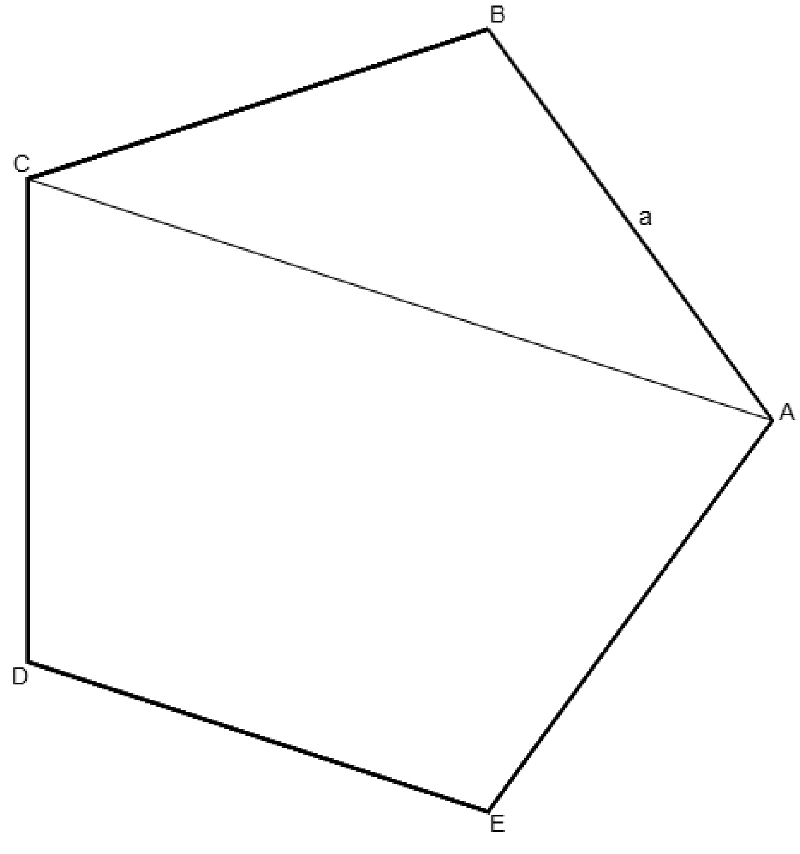
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Geometrie/Trigonometrie
> Regelmäßiges Fünfeck

Aufgabe: Zeige: In einem regelmäßigen Fünfeck mit Seitenlänge a ist das Verhältnis der Länge der Fünfeckdiagonale zur Seitenlänge der goldene Schnitt Φ (= $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ≈ 1,6180339887). Zeige außerdem:

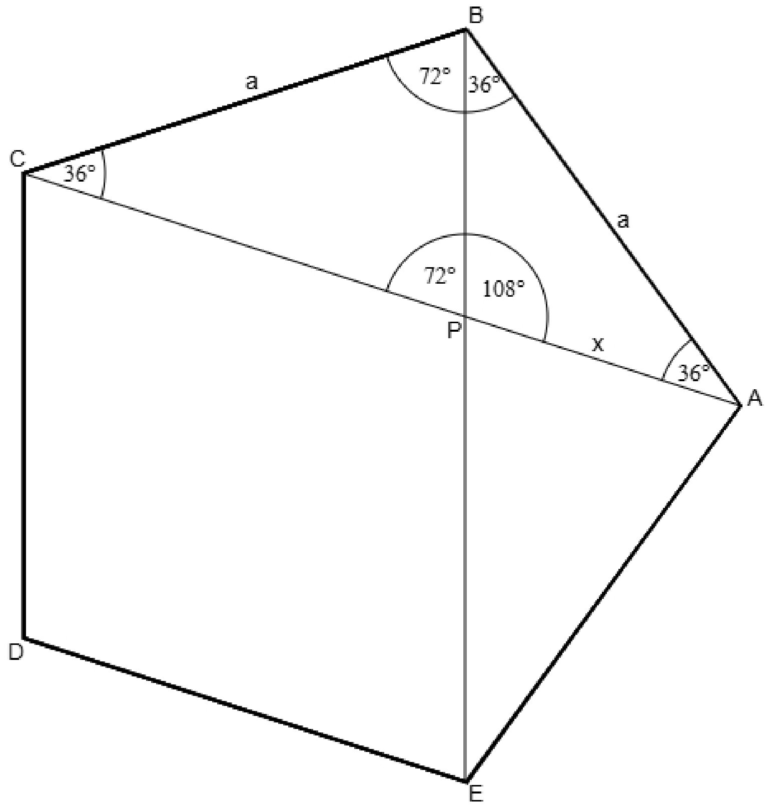
$$\cos 36° = \frac{1+\sqrt{5}}{4} = \frac{\Phi}{2}.$$



Lösung: I. Zentral für das Folgende ist der Begriff der <u>Ähnlichkeit</u> von Dreiecken. Zwei Dreiecke sind sich ähnlich, wenn sie (1) über dieselben Winkel verfügen oder (2) über dieselben Seitenverhältnisse. Beide Aussagen (1) und (2) sind äquivalent, wie leicht etwa über die trigonometrischen Beziehungen in allgemeinen Dreiecken gezeigt werden kann. In den Zusammenhang mit Ähnlichkeit sind daher auch die Strahlensätze zu stellen.

II. Wir lassen im Fünfeck ABCDE die Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BE}$ im Punkt P schneiden und bezeichnen die Strecke $\overline{AP}$ zwischen dem Diagonalschnittpunkt und der nächsten benachbarten

Ecke A mit $\overline{AP}$ = x.



Die Innenwinkel des Fünfecks als Winkel am Fünfeckmittelpunkt, der zusammen mit je zwei benachbarten Ecken des Fünfecks eine Ecke der fünf gleichschenkligen Dreiecke des Fünfecks darstellt, betragen je 360°:5 = 72°, die Außenwinkel des Fünfecks je 180° – 72° = 108°. Eine Fünfeckdiagonale zwischen zwei Ecken des Fünfecks bildet zusammen mit der zwischen den Ecken liegenden Ecke des Fünfecks ein gleichschenkliges Dreieck mit den Winkeln 108° und zweimal (180°-108°):2 = 72° = 36°. Die Diagonalen im regelmäßigen Fünfeck schneiden mithin die Außenwinkel im Verhältnis 72°:36°.
Nun sind die beiden gleichschenkligen Dreiecke ΔABC und ΔABP ähnlich wegen der zwei Winkel 36° und dem Winkel 108°. Folglich gilt unter Bezugnahme auf die Seitenverhältnisse:

$$\frac{\overline{AC}}{a} = \frac{a}{\overline{AP}} \quad (*).$$

Auch das Dreieck ΔBCP ist gleichschenklig mit den Schenkeln a = $\overline{BC}$ = $\overline{PC}$, so dass sich die Diagonale $\overline{AC}$ als: $\overline{AC}$ = a + x ergibt. Beziehung (*) wird damit zu:

$$\frac{a+x}{a} = \frac{a}{x}$$

bzw. zu:

$$\frac{a}{a} + \frac{x}{a} = \frac{a}{x} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{\frac{a}{x}} = \frac{a}{x},$$

wodurch mit $\Phi = \frac{a}{x}$ als dem Verhältnis der Länge der Fünfeckdiagonale $\overline{AC}$ zur Seitenlänge a bzw. von Seitenlänge a zur Strecke x zwischen Diagonalschnittpunkt und Ecke folgt:

$$1 + \frac{1}{\Phi} = \Phi \quad (**).$$

Gleichung (**) führt auf eine quadratische Gleichung:

$$1+\frac{1}{\Phi}=\Phi \qquad | \cdot \Phi$$

$$\Phi+1=\Phi^2 \qquad | -\Phi$$

$$1=\Phi^2-\Phi \qquad | -1$$

$$0=\Phi^2-\Phi-1 \qquad \text{(a-b-c-Formel: a = 1, b = -1, c = -1)}$$

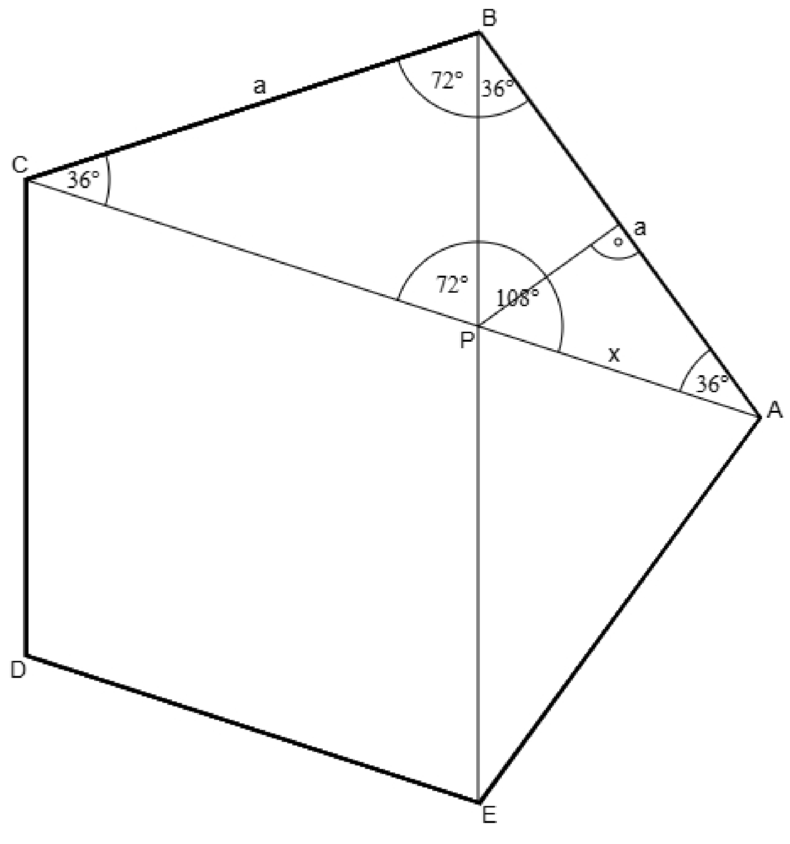
$$\Phi_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot(-1)}}{2\cdot 1}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

In der Geometrie (des regelmäßigen Fünfecks) macht nur die positive Lösung $\Phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ Sinn.

Φ ist aber die goldene Zahl. Im Verhältnis des goldenen Schnitts stehen also die Längen von Fünfeckdiagonale und Seitenlänge zueinander; ebenso schneiden sich zwei Fünfeckdiagonalen im Verhältnis des goldenen Schnitts.

III. Das gleichschenkligen Dreieck ΔABP wird durch eine Höhe in zwei rechtwinklige Dreiecke aufgeteilt. In solch einem rechtwinkligen Dreieck gilt für den gesuchten Kosinuswert:

$$\cos 36° = \frac{\frac{a}{2}}{x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{x}=\frac{1}{2}\Phi=\frac{1}{2}\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}.$$



IV. Wir vermerken nachstehende geometrische Beziehungen für Winkel im regelmäßigen Fünfeck:

$$\sin 36° = \sqrt{1-\cos^2(36°)}=\sqrt{1-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{1+2\sqrt{5}+5}{16}}=\sqrt{1-\frac{6+2\sqrt{5}}{16}}=$$

$$\sqrt{1-\frac{3+\sqrt{5}}{8}}=\sqrt{\frac{5}{8}-\frac{\sqrt{5}}{8}}=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}=\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{16}}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

$$\tan 36° = \frac{\sin 36°}{\cos 36°} = \frac{\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}}{\frac{1+\sqrt{5}}{4}} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{1+\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{(1+\sqrt{5})^2}} = \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{1+2\sqrt{5}+\sqrt{5}^2}} =$$

$$\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{1+2\sqrt{5}+5}} = \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{6+2\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}} = \sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}} =$$

$$\sqrt{\frac{15-5\sqrt{5}-3\sqrt{5}+\sqrt{5}^2}{3^2-\sqrt{5}^2}} = \sqrt{\frac{15-8\sqrt{5}+5}{9-5}} = \sqrt{\frac{20-8\sqrt{5}}{4}} = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$$

sowie:

$$\cos 72° = 1-2\sin^2 36° = 1-2\cdot\left(\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\right)^2 = 1-2\cdot\frac{10-2\sqrt{5}}{16} = 1-\frac{5-\sqrt{5}}{4} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

$$\sin 72° = 2\sin 36°\cdot\cos 36° = 2\cdot\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}\cdot\sqrt{(1+\sqrt{5})^2}}{8} =$$

$$\frac{\sqrt{(10-2\sqrt{5})(6+2\sqrt{5})}}{8} = \frac{\sqrt{60+20\sqrt{5}-12\sqrt{5}-4\sqrt{5}^2}}{8} = \frac{\sqrt{60+8\sqrt{5}-20}}{8} = \frac{\sqrt{40+8\sqrt{5}}}{8} =$$

$$\frac{2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{8} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

$$\tan 72° = \frac{\sin 72°}{\cos 72°} = \frac{\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}}{\frac{\sqrt{5}-1}{4}} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1} = \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{(\sqrt{5}-1)^2}} = \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{6-2\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}} =$$

$$\sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}} = \sqrt{\frac{15+5\sqrt{5}+3\sqrt{5}+\sqrt{5}^2}{3^2-\sqrt{5}^2}} = \sqrt{\frac{15+8\sqrt{5}+5}{9-5}} = \sqrt{\frac{20+8\sqrt{5}}{4}} = \sqrt{5+2\sqrt{5}}$$

und:

$$\cos 108° = \cos(90°+18°) = -\cos(90°-18°) = -\cos 72° = -\frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$$

$$\sin 108° = \sin(90°+18°) = \sin(90°-18°) = \sin 72° = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

$$\tan 108° = \tan(90°+18°) = -\tan(90°-18°) = -\tan(72°) = -\sqrt{5+2\sqrt{5}}$$

auch auf Grund der folgenden trigonometrischen Rechengesetze:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ (Satz des Pythagoras für Sinus und Kosinus)

$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$ (doppelter Winkel beim Sinus)

$\cos(2\alpha) = 1-2\sin^2\alpha$ (doppelter Winkel beim Kosinus)

$\sin(90°+\alpha) = \sin(90°-\alpha)$ (Symmetrie des Sinus)

$\cos(90°+\alpha) = -\cos(90°-\alpha)$ (Symmetrie des Kosinus)

$\tan(90°+\alpha) = -\tan(90°-\alpha)$ (Symmetrie des Tangens).

www.michael-buhlmann.de / 10.2024 / Aufgabe 2240