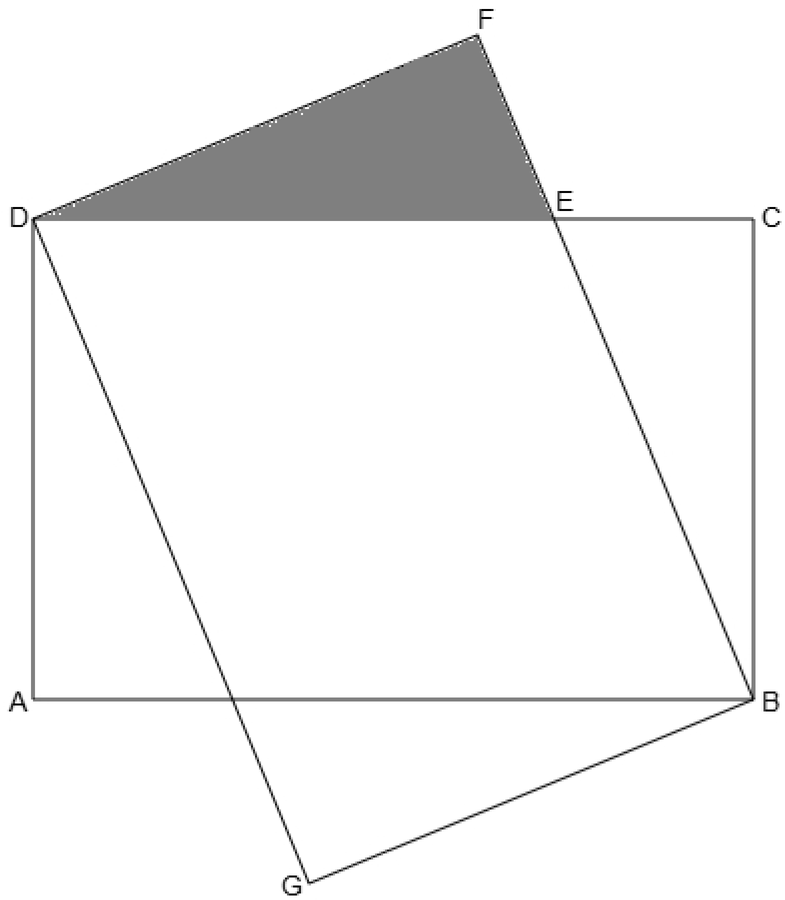
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Geometrie/Trigonometrie
> Rechtecke

Aufgabe: Das Rechteck ABCD ist 12 cm lang und 8 cm hoch. Ein kongruentes Rechteck BFDG hat mit dem Rechteck ABCD die Ecken B und D gemeinsam. Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks DEF.



Lösung: I. In einem rechtwinkligen Dreieck ΔABC mit den Seiten a, b, c und den Winkeln α, β, γ bei γ = 90° heißen a und b Katheten, c Hypotenuse. Die Kathete, die gegenüber einem Winkel α oder β liegt, heißt Gegenkathete (bei Winkel α Seite a, bei Winkel β Seite b), die Kathete, die an einem Winkel α oder β liegt, heißt Ankathete (bei Winkel α Seite b, bei Winkel β Seite a). Dann gelten der Satz des Pythagoras:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ (Hypotenuse)}$$
$$a^2 = c^2 - b^2 \Rightarrow a = \sqrt{c^2 - b^2} \text{ (Kathete)}$$
$$b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2} \text{ (Kathete)}$$

und die trigonometrischen Beziehungen (Sinus, Kosinus, Tangens):

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse},\ \cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{Ankathete}{Hypotenuse},\ \tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} \text{ (Winkel α)}$$
$$\sin\beta = \frac{b}{c} = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse},\ \cos\beta = \frac{a}{c} = \frac{Ankathete}{Hypotenuse},\ \tan\beta = \frac{b}{a} = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} \text{ (Winkel β)}$$
$$\sin\alpha = \cos\beta,\ \cos\alpha = \sin\beta,\ \tan\alpha = \frac{1}{\tan\beta},\ \tan\beta = \frac{1}{\tan\alpha}.$$

Mit den Dreieckswinkeln α, β und γ = 90° gelten noch die Beziehungen:

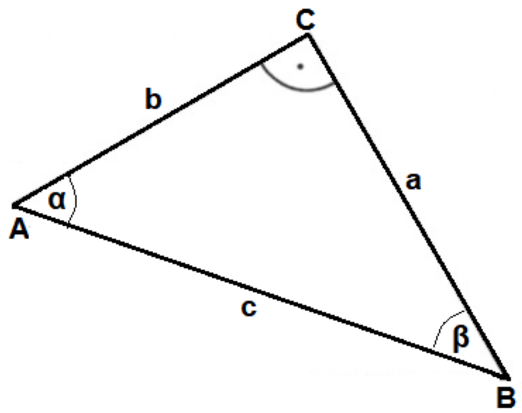
$$\alpha + \beta = 90°,\ \alpha = 90° - \beta,\ \beta = 90° - \alpha.$$

Mit den Seiten a, b, c des Dreiecks errechnet sich dessen Umfang:

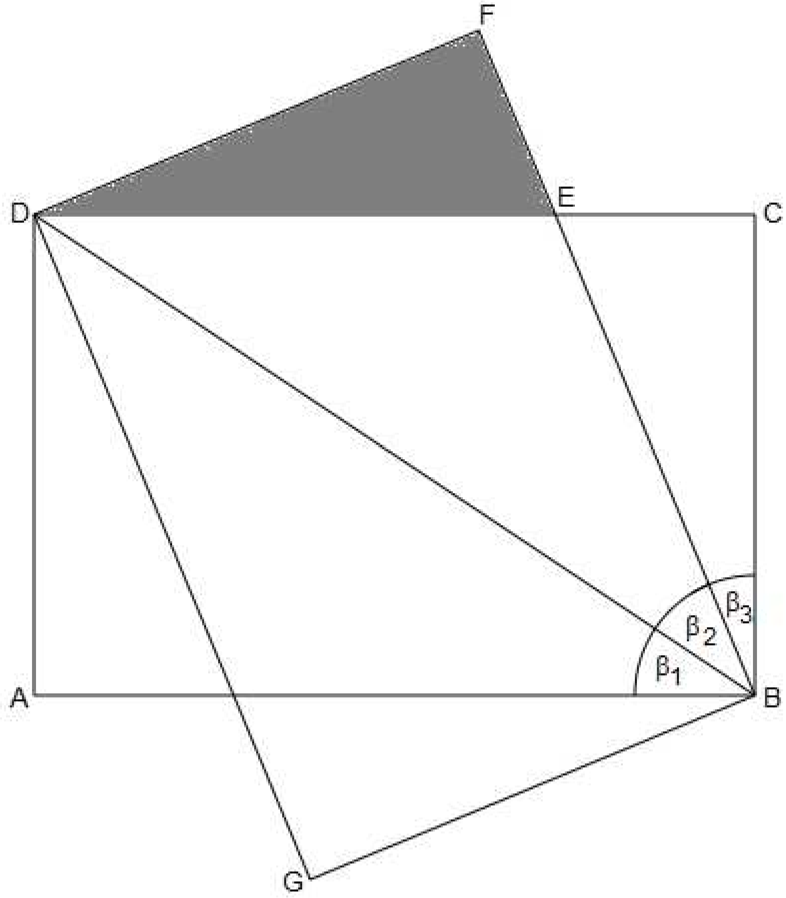
$$u = a + b + c.$$

Mit den Katheten a, b ermittelt sich der Flächeninhalt der Dreiecksfläche:

$$A = \frac{1}{2}ab.$$



II. Wir zeichnen die Diagonale $\overline{BD}$ im Rechteck ABCD ein, die gleichzeitig auch Diagonale im kongruenten Rechteck BFDG ist.



Im Dreieck ABD lässt sich der Winkel β_1 bestimmen als:

$$\tan \beta_1 = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{8}{12} \Rightarrow \beta_1 = \tan^{-1}(\frac{2}{3}) = 33{,}7°\ .$$

Wegen der Kongruenz der beiden Rechtecke gilt zudem: $\beta_1 = \beta_2$. Für den Winkel β_3 folgt auf Grund des rechten Winkels im Rechteck ABCD an der Ecke B:

$\beta_3 = 90 - \beta_1 - \beta_2 = 90° - 2 \cdot 33{,}7° = 22{,}6°$.

III. Wir wenden uns dem Dreieck BCE zu und kennen dessen Kathete $\overline{BC}$ = 8 cm sowie den Winkel $\beta_3 = 22{,}6°$. Für die Kathete $\overline{CE}$ gilt dann:

$$\tan \beta_3 = \frac{\overline{CE}}{\overline{BD}} \Rightarrow \tan 22{,}6° = \frac{\overline{CE}}{8} \Rightarrow \overline{CE} = 8 \cdot \tan 22{,}6° = 3{,}33 \text{ cm}.$$

IV. Nun sind auch die Dreiecke BCE und DEF zueinander kongruent; im Dreieck DEF tritt der Winkel β_3 an der Ecke D auf, das Dreieck ist ebenfalls rechtwinklig, die Katheten $\overline{BC} = \overline{DF}$ = 8 cm sind gleich lang. Wegen der Kongruenz gilt auch: $\overline{EF} = \overline{CE}$ = 3,33 cm.

V. Damit sind die beiden Katheten $\overline{DF}$ = 8 cm und $\overline{EF}$ = 3,33 cm im Dreieck DEF bekannt. Als Flächeninhalt des Dreiecks errechnen wir:

$$A_{DEF} = \frac{1}{2} \cdot \overline{DF} \cdot \overline{EF} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3{,}33 = 13{,}32 \approx 13{,}3 \text{ cm}^2.$$

www.michael-buhlmann.de / 11.2024 / Aufgabe 2253