Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Algebra
> Trigonometrische Formeln

Aufgabe: a) Beweise die trigonometrische Formel des doppelten Winkels für die Sinusfunktion:

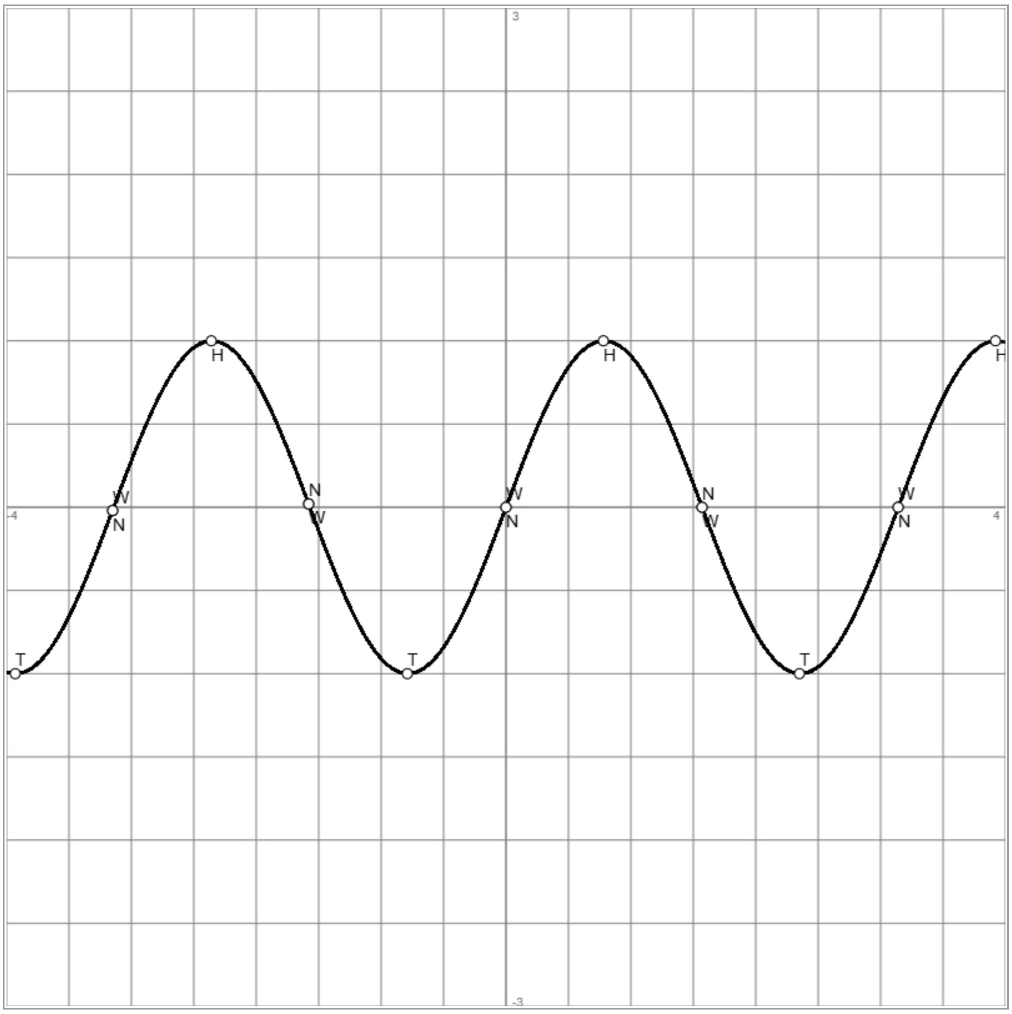
$$2\cdot\sin(x)\cdot\cos(x) = \sin(2x),\ x\varepsilon\mathbf{R}.$$

b) Leite aus der obigen Beziehung die Beziehung des doppelten Winkels für die Kosinusfunktion her.

Lösung: a) I. Wir untersuchen zunächst die Funktion f(x) = 2·sin(x)·cos(x) und haben:

Wertetabelle:				
x	**f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
-4	-0.9894	-0.29	3.96	
-3.93	-1	0	4	Tiefpunkt T(-5π/4|-1)
-3.5	-0.657	1.51	2.63	
-3.15	0	2	0	Nullstelle N(-π|0) = Wendepunkt W(-π|0)
-3	0.2794	1.92	-1.12	
-2.5	0.9589	0.57	-3.84	
-2.36	1	0	-4	Hochpunkt H(-3π/4|1)
-2	0.7568	-1.31	-3.03	
-1.58	0	-2	0	Nullstelle N(-π/2|0) = Wendepunkt W(-π/2|0)
-1.5	-0.1411	-1.98	0.56	
-1	-0.9093	-0.83	3.64	
-0.79	-1	0	4	Tiefpunkt T(-π/4|-1)
-0.5	-0.8415	1.08	3.37	
0	0	2	0	Nullstelle N(0|0) = Schnittpunkt S_y(0|0) = Wendepunkt W(0|0)
0.5	0.8415	1.08	-3.37	
0.78	1	0	-4	Hochpunkt H(π/4|1)
1	0.9093	-0.83	-3.64	
1.5	0.1411	-1.98	-0.56	
1.57	0	-2	-0.01	Nullstelle N(π/2|0) = Wendepunkt W(π/2|0)
2	-0.7568	-1.31	3.03	
2.35	-1	0	4	Tiefpunkt T(3π/4|-1)
2.5	-0.9589	0.57	3.84	
3	-0.2794	1.92	1.12	
3.14	-0.0032	2	0.01	Nullstelle N(π|0) = Wendepunkt W(π|0)
3.5	0.657	1.51	-2.63	
3.92	1	0	-4	Hochpunkt H(5π/4|1)
4	0.9894	-0.29	-3.96	

Graph:



II. Die Funktion f(x) = 2·sin(x)·cos(x) hat nun das Aussehen einer Sinusfunktion vom Typ f(x) = a·sin(bx) + d, wobei die Unbekannten a, b, d noch zu bestimmen sind (Bestimmungsaufgabe). Dies kann mittels des Hochpunkts H(π/4|1) und des unmittelbar darauffolgenden Tiefpunkts T(3π/4|-1) geschehen. Dabei gilt:

d = $\frac{y_H + y_T}{2} = \frac{1+(-1)}{2}$ = 0

|a| = $\frac{y_H - y_T}{2} = \frac{1-(-1)}{2} = \frac{2}{2}$ = 1 => a = 1

$\frac{p}{2} = |x_H - x_T| = \left|\frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{4}\right| = \left|-\frac{\pi}{2}\right| = \frac{\pi}{2}$ => p = π => b = $\frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{\pi}$ = 2

(mit p als Periode der Sinusfunktion). Einsetzen von a = 1, b = 2 und d = 0 in den Ansatz f(x) = a·sin(bx) + d ergibt: f(x) = sin(2x) als Funktion des doppelten Winkels. Damit folgt die zu beweisende Identität: 2·sin(x)·cos(x) = sin(2x), xε**R**.

b) Nach a) gilt die Beziehung:

f(x) = 2·sin(x)·cos(x) = sin(2x), xε**R**.

Wir leiten die Funktion f(x) = 2·sin(x)·cos(x) gemäß der Produktregel ab zu:

f'(x) = 2·cos(x)·cos(x) + 2·sin(x)·(-sin(x)) = 2·$\cos^2$(x) – 2·$\sin^2$(x).

Ebenso leiten wir dieselbe Funktion f(x) = sin(2x) gemäß der Kettenregel ab zu:

f'(x) = cos(2x)·2 = 2·cos(2x).

Beide Ableitungen f'(x) sind gleich, so dass folgt:

2·$\cos^2$(x) – 2·$\sin^2$(x) = 2·cos(2x) ⇔ cos(2x) = $\cos^2$(x) – $\sin^2$(x) (= 1 – 2·$\sin^2$(x) o.ä.)

als Beziehung des doppelten Winkels der Kosinusfunktion.