Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Algebra
> Trigonometrische Formeln

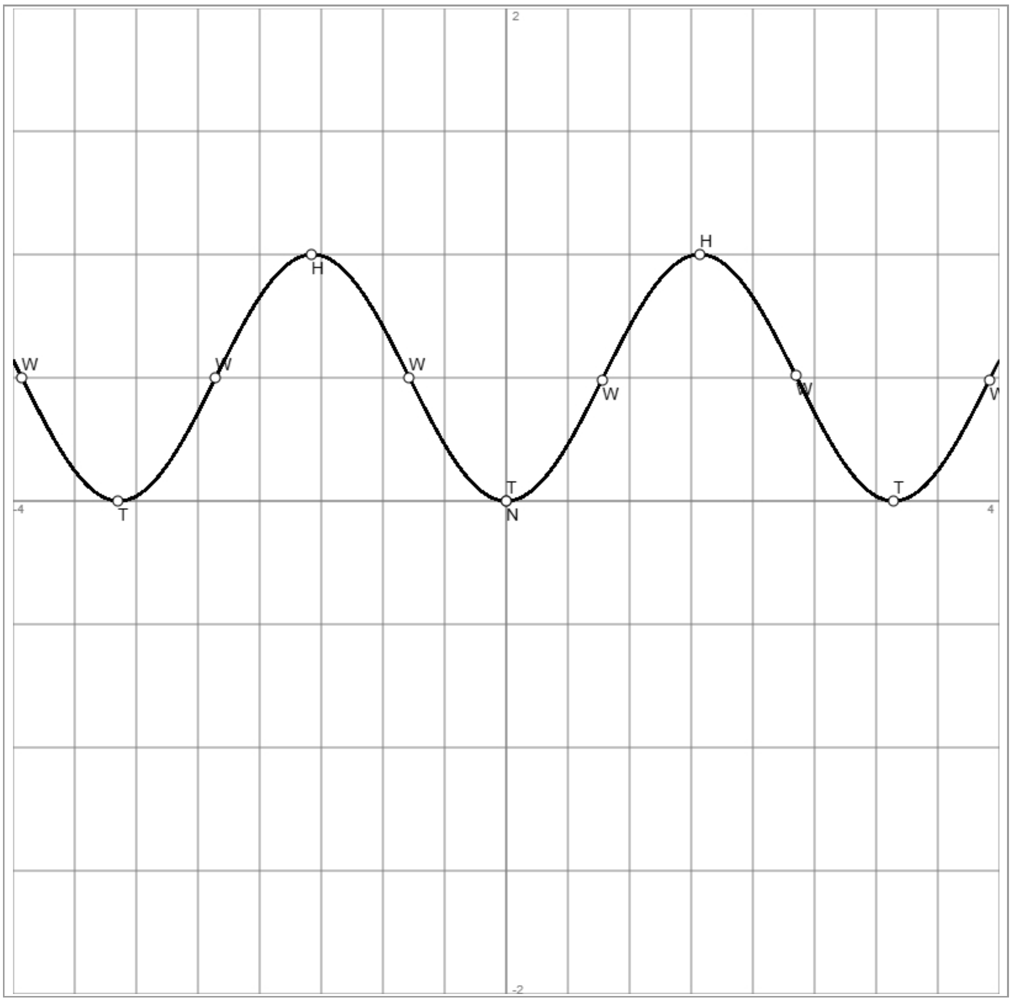
Aufgabe: Beweise die trigonometrische Formel zum Quadrat der Sinusfunktion:

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2}\cdot(1-\cos(2x)),\ x\varepsilon \mathbf{R}.$$

Lösung: a) I. Wir untersuchen zunächst die Funktion $f(x) = \sin^2(x)$ und haben:

Wertetabelle:				
x	**f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
-4	0.5728	-0.99	-0.29	
-3.93	0.5	-1	0	Wendepunkt W(-5π/4|0.5)
-3.5	0.123	-0.66	1.51	
-3.15	0	0	2	Tiefpunkt T(-π|0)
-3	0.0199	0.28	1.92	
-2.5	0.3582	0.96	0.57	
-2.36	0.5	1	0	Wendepunkt W(-3π/4|0.5)
-2	0.8268	0.76	-1.31	
-1.58	1	0	-2	Hochpunkt H(-π|1)
-1.5	0.995	-0.14	-1.98	
-1	0.7081	-0.91	-0.83	
-0.79	0.5	-1	0	Wendepunkt W(-π/4|0.5)
-0.5	0.2298	-0.84	1.08	
0	0	0	2	Nullstelle N(0|0) = Schnittpunkt S_y(0|0) = Tiefpunkt T(0|0)
0.5	0.2298	0.84	1.08	
0.78	0.5	1	0.02	Wendepunkt W(π/4|0.5)
1	0.7081	0.91	-0.83	
1.5	0.995	0.14	-1.98	
1.57	1	0	-2	Hochpunkt H(π/2|1)
2	0.8268	-0.76	-1.31	
2.35	0.5	-1	0	Wendepunkt W(3π/4|0.5)
2.5	0.3582	-0.96	0.57	
3	0.0199	-0.28	1.92	
3.14	0	0	2	Tiefpunkt T(π|0)
3.5	0.123	0.66	1.51	
3.92	0.5	1	0	Wendepunkt W(5π/4|0.5)
4	0.5728	0.99	-0.29	

Graph:



II. Die Funktion f(x) = $\sin^2(x)$ hat nun das Aussehen einer Kosinusfunktion mit f(x) = a·cos(bx) + d, wobei die Unbekannten a, b, d noch zu bestimmen sind (Bestimmungsaufgabe). Dies kann mittels des Tiefpunkts T(0|0) und des unmittelbar darauffolgenden Hochpunkts T(π/2|1) geschehen. Dabei gilt:

d = $\frac{y_H + y_T}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$ = 0,5

|a| = $\frac{y_H - y_T}{2} = \frac{1-0}{2} = \frac{1}{2}$ = 0,5 => a = -0,5 (Tiefpunkt auf der y-Achse)

$\frac{p}{2} = |x_H - x_T| = \left|\frac{\pi}{2} - 0\right| = \left|\frac{\pi}{2}\right| = \frac{\pi}{2}$ => p = π => b = $\frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{\pi}$ = 2

(mit p als Periode der Kosinusfunktion). Einsetzen von a = -0,5, b = 2 und d = 0,5 in den Ansatz f(x) = a·cos(bx) + d ergibt: f(x) = -0,5·cos(2x) + 0,5 als Funktion des doppelten Winkels. Damit folgt die zu beweisende Identität:

$\sin^2(x)$ = -0,5·cos(2x) + 0,5 = 0,5 – 0,5·cos(2x) = 0,5·(1-cos(2x) = $\frac{1}{2}$·(1-cos(2x)), xε**R**.

www.michael-buhlmann.de / 10.2024 / Aufgabe 2243