Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Umkehrfunktion

Aufgabe: Gegeben sei die gebrochen rationale Funktion

$$f(x) = x - \frac{1}{x}.$$

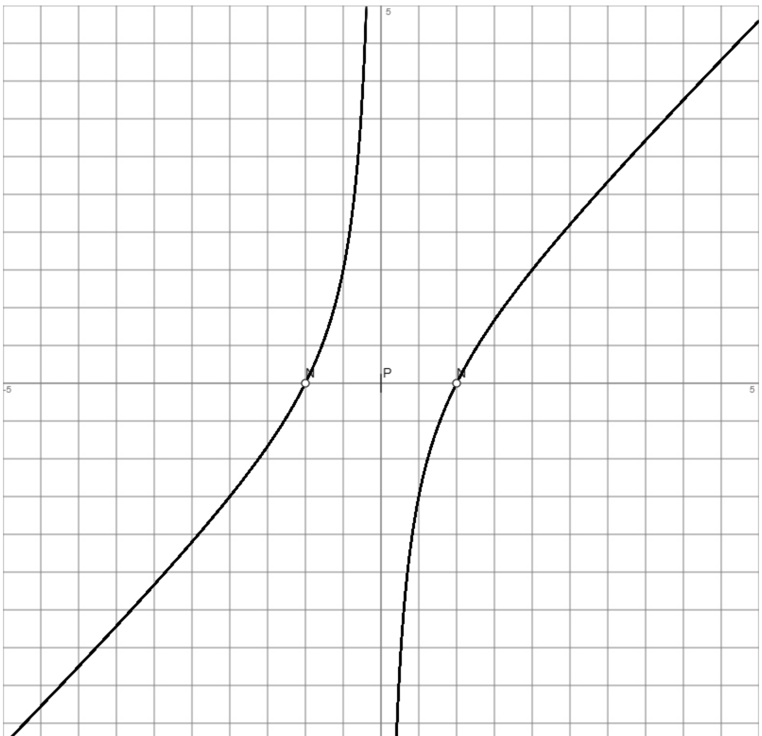
a) Bestimme den maximalen Definitionsbereich D_f der Funktion f(x) und den zugehörigen Werteberich W_f. Auf welchen Teilmengen des Definitionsbereichs existiert eine Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$ zu f(x)?

b) Es sei D_f =]0, +∞[. Bestimme die Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$ zu f(x) und deren Definitions- und Wertebereich.

Lösung: a) I. Zunächst ist wegen des Bruchs 1/x der Funktionsterm $f(x) = x - \frac{1}{x}$ für alle x ≠ 0 definiert, der maximale <u>Definitionsbereich</u> lautet damit: D_f = **R**\{0}. Bei x = 0 besitzt die Funktion eine senkrechte Asymptote mit Vorzeichenwechsel, weiter:

x -> -∞: f(x) -> -∞
x -> +∞: f(x) -> +∞

wegen der 1. Winkelhalbierenden y = x als schiefer Asymptote zu f(x). Von daher ergibt sich als Wertebereich: W_f = **R**.



II. Umkehrbar ist eine Funktion f(x) auf den Teilmengen des Definitionsbereichs D_f, auf denen f(x) monoton (fallend, steigend) ist. Wir untersuchen daher f(x) auf Extrempunkte und erhalten zunächst als Ableitungen:

$f(x)=x-\frac{1}{x}$ => $f'(x)=1+\frac{1}{x^2}$ (=> $f''(x)=-\frac{2}{x^3}$).

Nullsetzen der 1. Ableitung führt auf:

$$f'(x)=1+\frac{1}{x^2}=0 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2}=-1 \Leftrightarrow x^2=-1$$

und damit auf keine Lösung. Extrem-punkte besitzt die Funktion f(x) also nicht. Damit ist f(x) auf den Intervallen]-∞; 0[bzw.]0; +∞[monoton (fallend, steigend). Und zwar ist wegen f‘(-1) = f’(1) = 2 > 0 die Funktion auf jedem dieser Intervalle jeweils monoton steigend.

b) Auf dem Definitionsbereich D_f =]0, +∞[ist die Funktion $f(x)=x-\frac{1}{x}$ (streng) monoton steigend.

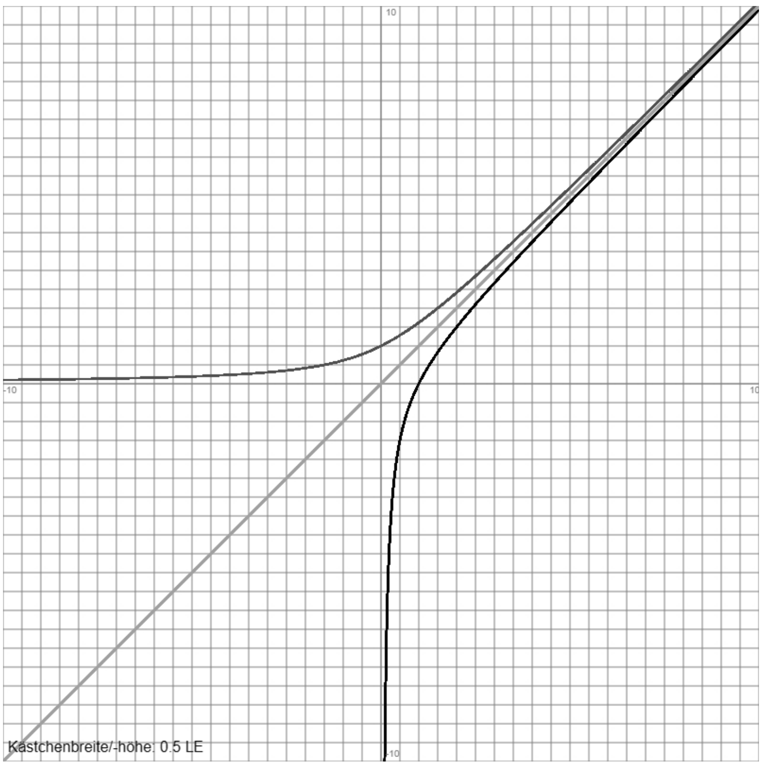
Mit Definitionsbereich D_f =]0, +∞[ist W_f = **R**, so dass für die existierende Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$ zu f(x) gilt: $D_{f^{-1}}$ = R, $W_{f^{-1}}$ =]0, +∞[. Die Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$ bestimmt sich vermöge:

$y=x-\frac{1}{x}$	(Vertauschen x <-> y)
$x=y-\frac{1}{y}$	| ·y
$xy=y^2-1$	| -xy
$0=y^2-xy-1$	(abc-Formel: a = 1, b = -x, c = -1)
$y=\frac{x\pm\sqrt{x^2-4\cdot 1\cdot(-1)}}{2\cdot 1}=\frac{x\pm\sqrt{x^2+4}}{2}$.	

Von den beiden Ästen der Wurzelfunktion entsteht dann

$f^{-1}(x)$ = $\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}=\frac{1}{2}(x+\sqrt{x^2+4})$

durch Spiegelung um die 1. Winkelhalbierende aus der Funktion $f(x)=x-\frac{1}{x}$.



(**R** = reelle Zahlen)